Dương Chính Cương

BÀI GIẢNG

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

MỤC LỤC

DANH MỤC HÌNH VẼ

KÍ HIỆU

u(t): Tín hiệu vào

e(t): Sai lệch điều khiển

x(t): Tín hiệu điều khiển hoặc biến trạng thái của hệ thống

y(t): Tín hiệu ra

z(t): Tín hiệu phản hồi

K: Hệ số khuếch đại

T: Hằng số thời gian

ξ: Độ suy giảm tín hiệu hay hệ số tắt dần

A: Ma trận hệ thống.

B: Ma trận điều khiển hay mạ trận đầu vào.

C: Ma trận ra

D: Ma trận vòng.

□(t): Hàm xung đơn vị

1(t): Tín hiệu bậc thang đơn vị

g(t): Hàm quá độ xung

h(t): Hàm quá độ

s: Biến sử dụng trong biến đối Laplace

z: Biển sử dụng trong biến đổi Z

ω_n: Đáp ứng tự do

Tp (Peak Time): Thời gian đỉnh

%OS (Percent Overshoot): Độ quá điều chỉnh

Tr (rise time): Thời gian tăng

Ts (settling time): Thời gian xác lập

LỜI NÓI ĐẦU

Môn học Lý thuyết điều khiển tự động là một trong những môn học quan trọng trong nhiều ngành kỹ thuật như Tự động hóa, Điện khí hóa xí nghiệp, Kỹ thuật điện tử. Để có thể tích hợp, phân tích được các hệ điều khiển tự động người kỹ sư cần phải có kiến thức rất vững vàng về Lý thuyết điều khiển. Trong giáo trình này, chúng tôi cung cấp những kiến thức cơ bản nhất cho người học về Lý thuyết điều khiển bao gồm các khái niệm về hệ thống điều khiển tự động, mô hình toán học của hệ thống điều khiển, sự ổn định của hệ thống cũng như phương pháp giảm thiểu hệ thống đa cấp, đánh giá chất lượng hệ thống. Các hệ thống xem xét trong giáo trình này là giới hạn trong các hệ tuyến tính. Các kiến thức thu nhận được qua giáo trình này sẽ là những nền tảng vững chắc cho việc tiếp thu các kiến thức về phần Điều khiển nâng cao, bao gồm xem xét hệ phi tuyến, phân tán, các phương pháp mới xem xét tính ổn định của hệ phi tuyến.

Mặc dù nhóm tác giả đã rất cẩn thận trong việc biên soạn giáo trình nhưng chắc chắn trong giáo trình sẽ không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự quan tâm đóng góp của các độc giả để giáo trình được hoàn thiện thêm. Các đóng góp xin được gửi về cuongtncdc@gmail.com. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

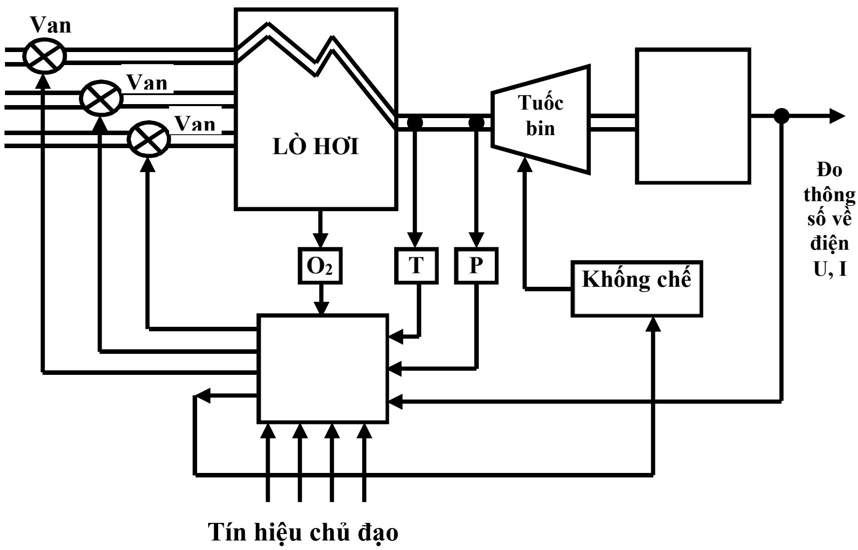
Nhóm tác giả

CHƯƠNG 1

MÔ TẢ MỘT HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

1.1. Các khái niệm cơ bản

Để hiểu được khái niệm về hệ thống điều khiển tự động trước hết ta xem ví dụ sau:



Hình 1.1: Sơ đồ điều khiển của lò hơi để phát điện

Điều khiển là tập hợp tất cả các tác động có mục đích nhằm điều khiển một quá trình này hay quá trình kia theo một quy luật hay một chương trình cho trước.

Điều khiển học là một bộ môn khoa học nghiên cứu nguyên tắc xây dựng các hệ điều khiển.

Quá trình điều khiển hoặc điều chỉnh được thực hiện mà không có sự tham gia trực tiếp của con người, thì chúng ta gọi đó là quá trình điều khiển và điều chỉnh tự động.

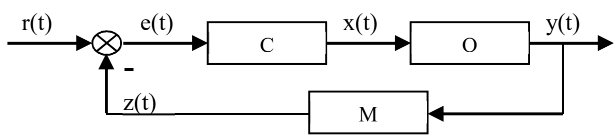
Tập hợp tất cả các thiết bị mà nhờ đó quá trình điều khiển được thực hiện gọi là hệ thống điều khiển.

Tập hợp tất cả các thiết bị kỹ thuật, đảm bảo điều khiển hoặc điều chỉnh tự động một quá trình nào đó được gọi là hệ thống điều khiển hoặc điều chỉnh tự động (đôi khi gọi tắt là hệ thống tự động – HTTĐ).

1.2. Các phần tử cơ bản của hệ thống điều khiển tự động

Đối tượng điều khiển (Object), Thiết bị điều khiển (Controller), Thiết bị đo lường (Measuring device).

- Sơ đồ tổng quát



Hình 1.2: Sơ đồ tổng quát hệ thống điều khiển tự động

Mọi hệ thống điều khiển tự động đều bao gồm 3 bộ phận cơ bản:

- Thiết bị điều khiển C (Controller).

- Đối tượng điều khiển (Object).

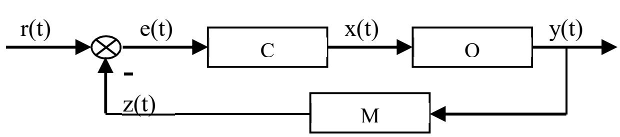
- Thiết bị đo lường (Measuring device).

r(t) Tín hiệu vào hay còn gọi là tín hiệu đặt; e(t) Sai lệch điều khiển; x(t) Tín hiệu điều khiển; y(t) Tín hiệu ra; z(t) Tín hiệu phản hồi

1.3. Các nguyên tắc điều khiển cơ bản

Có 3 nguyên tắc điều khiển cơ bản:

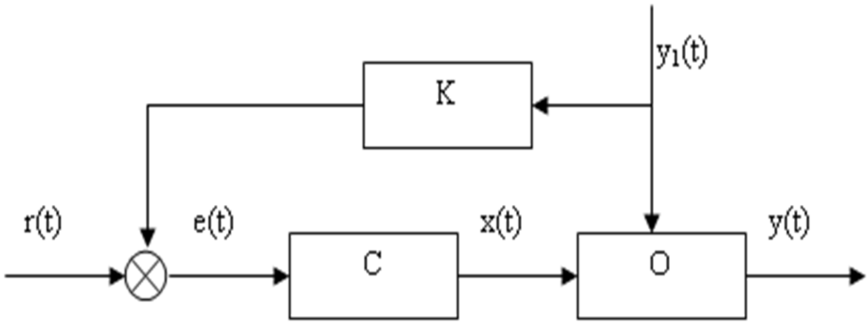
-Nguyên tắc điều khiển theo sai lệch (Hình 1.3).



Hình 1.3: Sơ đồ nguyên tắc điều khiển theo sai lệch

Tín hiệu ra y(t) được đưa vào so sánh với tín hiệu vào r(t) nhằm tạo nên tín hiệu tác động lên đầu vào bộ điều khiển C nhằm tạo tín hiệu điều khiển đối tượng O.

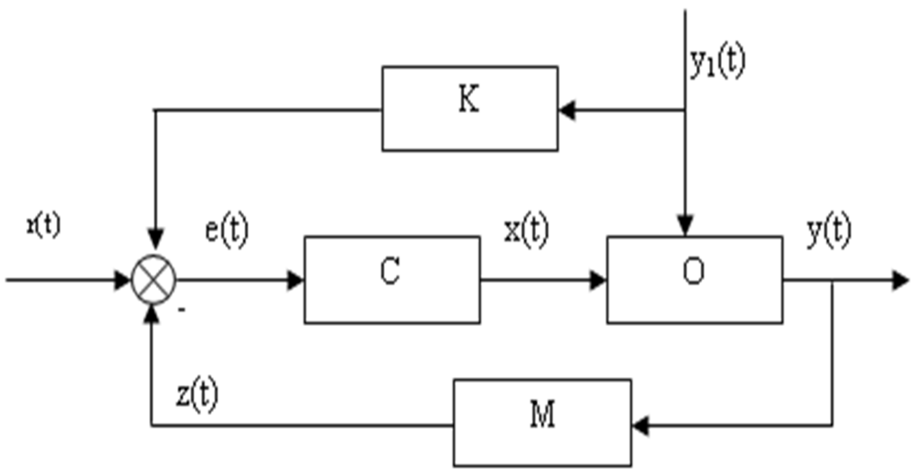
-Nguyên tắc điều khiển theo phương pháp bù nhiễu (Hình 1.4)



Hình 1.4: Sơ đồ nguyên tắc điều khiển bù nhiễu

Nguyên tắc bù nhiễu là sử dụng thiết bị bù K để giảm ảnh hưởng của nhiễu là nguyên nhân trực tiếp gây ra hậu quả cho hệ thống (Hình 1.4).

-Nguyên tắc điều khiển theo sai lệch và bù nhiễu (Hình 1.5)



Hình 1.5: Sơ đồ nguyên tắc điều khiển hỗn hợp

Nguyên tắc điều khiển hỗn hợp là phối hợp cả hai nguyên tắc trên, vừa có hồi tiếp theo sai lệch vừa dùng các thiết bị để bù nhiễu.

1.4. Phân loại các hệ thống điều khiển tự động

1.4.1 Phân loại theo nguyên lý xây dựng

Các phần tử được phân chia thành các loại: Hệ thống điều khiển theo mạch hở, hệ thống điều khiển theo mạch kín và hệ thống điều khiển hỗn hợp.

Ngoài những nguyên lý trên, từ những năm 60 của thế kỷ XX, trên cơ sở áp dụng điều khiển học trong cơ thể sống vào kỹ thuật đã ra đời một loại hình hệ thống tự động mô phỏng hoạt động của cơ thể sống: đó là các hệ tự chỉnh, thích nghi. Nguyên lý tự chỉnh và thích nghi không đòi hỏi phải biết đầy đủ các đặc tính của quá trình điều khiển và trong quá trình làm việc, các hệ thống này tự chỉnh và thích nghi với các điều kiện bên ngoài thay đổi.

Lý thuyết các hệ điều khiển tự chỉnh và thích nghi đã trở thành một nhánh phát triển quan trọng của lý thuyết điều khiển tự động.

Vì hầu hết các hệ thống điều khiển tự động trong kỹ thuật là những hệ mạch kín và quá trình điều khiển các thiết bị kỹ thuật chung quy lại là quá trình điều chỉnh các tham số của nó, nên dưới đây chúng ta sẽ đề cập đến sự phân loại các hệ thống điều khiển tự động mạch kín và lý thuyết về các hệ đó.

1.4.2. Phân loại theo tính chất của lượng vào.

Tuỳ theo tính chất của tác động đầu vào, các hệ thống điều khiển tự động có 3 loại:

Hệ thống ổn định tự động (điều chỉnh theo hằng số) là hệ thống có lượng vào không đổi. Nhiệm vụ của hệ thống là duy trì một hoặc một vài đại lượng vật lý ở giá trị không đổi. Thí dụ như hệ thống điều khiển tốc độ động cơ nhiệt, hệ thống điều khiển điện áp, tần số của máy phát, hệ ổn định đường bay của máy bay khi góc lái không thay đổi ...

Hệ thống điều chỉnh theo chương trình là hệ thống có lượng vào là các hàm đã biết trước, có thể dưới dạng chương trình. Thí dụ hệ điều khiển đường bay định trước của máy bay không người lái, hệ thống điều khiển các máy công cụ: bào, phay với chương trình định trước trong bộ nhớ máy tính...

Hệ tự động bám, gọi tắt là hệ bám là hệ thống có lượng vào là các hàm thời gian không biết trước, có thể thay đổi theo quy luật bất kỳ. Nhiệm vụ của hệ là bảo đảm lượng ra phải "bám" theo sự thay đổi của lượng vào. Thí dụ các hệ như là hệ bám đồng bộ góc, các hệ bám vô tuyến điện tử của các đài radar...

1.4.3. Phân loại theo dạng tín hiệu sử dụng trong hệ thống

Theo dạng tín hiệu sử dụng trong hệ thống, chúng ta có các tác động liên tục và các hệ thống gián đoạn (hay hệ rời rạc).

Hệ tác động liên tục (gọi tắt là hệ liên tục) là hệ mà tất cả các phần tử của hệ có lượng ra là các hàm liên tục theo thời gian.

Tín hiệu dưới dạng hàm liên tục có thể là tín hiệu một chiều (chưa biến điệu) hoặc tín hiệu xoay chiều (đã được biến điệu) tương ứng chúng ta có hệ điều khiển tự động một chiều (DC) và hệ thống điều khiển xoay chiều (AC) (thí dụ hệ thống bám đồng bộ công suất nhỏ dùng động cơ chấp hành 2 pha).

Hệ tác động gián đoạn (gọi tắt là hệ gián đoạn hay hệ rời rạc) là các hệ có chứa ít nhất một phần tử gián đoạn, tức là phần tử có lượng vào là một hàm liên tục và lượng ra là một hàm gián đoạn theo thời gian.

Tuỳ theo tính chất gián đoạn của lượng ra, các hệ gián đoạn có thể phân chia thành các loại: hệ thống điều khiển xung, hệ thống điều khiển kiểu rơ le và hệ thống điều khiển số.

Nếu sự gián đoạn của tín hiệu ra xảy ra qua những thời gian xác định (ta gọi là gián đoạn theo thời gian) khi tín hiệu vào thay đổi, thì ta có hệ điều khiển xung.

Nếu sự gián đoạn của tín hiệu xảy ra khi tín hiệu vào qua những giá trị ngưỡng xác định nào đó (chúng ta gọi là gián đoạn theo mức), thì có thể điều khiển kiểu rơle. Hệ rơle thực chất là hệ phi tuyến, vì đặc tính tĩnh của nó là hàm phi tuyến. Đây là đối tượng nghiên cứu của một phần quan trọng trong lý thuyết điều khiển.

Nếu phần tử gián đoạn có tín hiệu ra dưới dạng mã số (gián đoạn cả theo mức và cả theo thời gian), thì ta có hệ điều khiển số. Hệ thống điều khiển số là hệ chứa các thiết bị số (các bộ biến đổi A/D, D/A, máy tính điện tử (PC), bộ vi xử lý.

1.4.4. Phân loại theo dạng phương trình toán học mô tả hệ thống

Về mặt toán học, các hệ thống điều khiển đều có thể mô tả bằng các phương trình toán học: phương trình tĩnh và phương trình động. Dựa vào tính chất của các phương trình, chúng ta phân biệt hệ thống điều khiển tuyến tính và hệ thống điều khiển không tuyến tính (phi tuyến).

Hệ thống điều khiển tuyến tính là hệ thống được mô tả bằng phương trình toán học tuyến tính. Tính chất tuyến tính của các phần tử và của cả hệ thống điều khiển chỉ là tính chất lý tưởng. Vì vậy, các phương trình toán học của hệ thống là các phương trình đã được tuyến tính hoá, tức là thay các sự phụ thuộc gần đúng tuyến tính.

Hệ tuyến tính có phương trình động học với các tham số không thay đổi thì gọi là *hệ thống điều khiển tuyến tính có tham số không thay đổi*, hay hệ điều khiển tuyến tính dừng, còn nếu hệ thống có phương trình với tham số thay đổi thì gọi là *hệ thống điều khiển tuyến tính có tham số biến thiên*, hay hệ thống điều khiển tuyến tính không dừng.

Hệ thống điều khiển phi tuyến là hệ thống được mô tả bằng phương trình toán học phi tuyến. Hệ phi tuyến là hệ có chứa các phần tử phi tuyến điển hình, thí dụ đó là hệ có chứa các phần tử rơle.

1.4.5 Phân loại theo tính chất của các tác động bên ngoài

Các tác động bên ngoài vào hệ tự động có quy luật thay đổi đã biết trước hoặc mang tính chất ngẫu nhiên.

Hệ thống tiền định là các hệ có các tác động bên ngoài là tiền định, tức là đã biết trước các quy luật thay đổi của nó (thí dụ xét hệ thống với các tác động điển hình).

Hệ thống không tiền định (hay hệ ngẫu nhiên) là các hệ được xem xét nghiên cứu khi các tác động bên ngoài là các tín hiệu ngẫu nhiên.

1.4.6. Phân loại theo số lượng đại lượng cần điều khiển

Tuỳ theo số lượng cần điều khiển (lượng ra của hệ) chúng ta có: hệ một chiều và hệ nhiều chiều.

Hệ thống điều khiển một chiều có chứa một đại lượng cần điều khiển, còn hệ thống điều khiển nhiều chiều là hệ có chứa từ hai đại lượng cần điều khiển trở lên. Thí dụ về hệ nhiều chiều có thể là hệ thống điều khiển một máy phát điện, nếu hệ thống điều khiển cùng một lúc điều khiển tự động điện áp và tần số của nó.

Ngoài các cách phân loại chính đã xét ở trên, tuỳ thuộc vào sự tồn tại sai số của hệ ở trạng thái cân bằng, chúng ta phân biệt hai loại hệ thống: hệ thống tĩnh (có sai số tĩnh) và hệ phiếm tĩnh (không có sai số tĩnh). Tuỳ thuộc vào quy luật (định luật) điều khiển (tức là dạng của tín hiệu điều khiển x(t) do cơ cấu điều khiển tạo ra), chúng ta phân biệt các bộ điều khiển tỷ lệ (bộ điều khiển P), bộ điều khiển tỷ lệ vi phân (bộ điều khiển PD), bộ điều khiển vi phân - tích phân (bộ điều khiển PID), bộ điều khiển phi tuyến như mờ, nơ-ron và rơ le.

1.5 Quá trình thiết lập một hệ thống điều khiển

- **Bước 1:** Chuyển đổi các yêu cầu kỹ thuật thành một hệ thống vật lý.

- **Bước 2:** Vẽ sơ đồ khối chức năng. Chuyển đổi sự miêu tả đặc tính hệ thống thành một sơ đồ khối chức năng. Đây là sự miêu tả về các phần chi tiết của hệ thống và mối quan hệ giữa chúng.

- **Bước 3:** Thiết lập sơ đồ nguyên lí.

- **Bước 4:** Sử dụng sơ đồ nguyên lý thiết lập sơ đồ khối hoặc graph tín hiệu hoặc biểu diễn không gian trạng thái.

- **Bước 5:** Rút gọn sơ đồ khối.

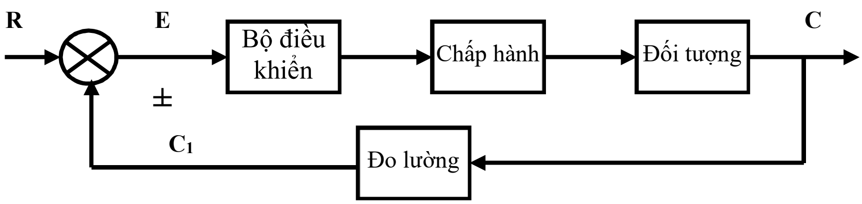
- **Bước 6:** Phân tích và thiết kế.

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TOÁN HỌC CỦA HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

2.1. Các khâu cơ bản

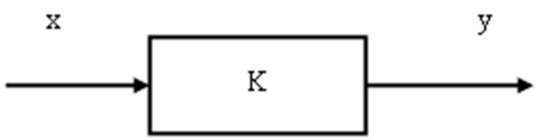
Ta có một hệ thống điều khiển:



Hình 2.1: Sơ đồ một hệ thống điều khiển tổng quát

Đa phần các mạch phản hồi của hệ thống điều khiển là mạch phản hồi âm. Tuy nhiên, ta vẫn có thể thiết kế phản hồi dương nếu thích hợp. Khi chúng ta tiến hành phân tích hệ thống tốt hay xấu hay thiết kế bộ điều khiển cho hệ thống đều phải xuất phát từ mô hình toán học của hệ thống hay nói cách khác ta phải tìm được quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của hệ thống.

2.1.1 Khâu khuếch đại



Hình 2.2: Sơ đồ khâu khuếch đại tĩnh

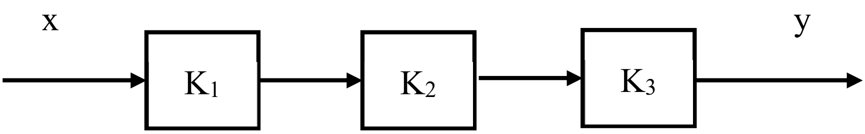
- Khâu khuếch đại là tín hiệu đầu ra là khuếch đại của tín hiệu đầu vào

$$y = K.x \qquad (2.1)$$

trong đó: K là hệ số khuếch đại (có giá trị là hằng số)

(Khuếch đại tĩnh là cứ có tín hiệu đầu vào thì tìm được tín hiệu đầu ra)

- Cũng có hệ thống có khuếch đại nhiều tầng



Hình 2.3: Sơ đồ khâu khuếch đại tầng

2.1.2 Khâu tích phân

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{T_i}\int_{t_0}^{t} x(t)dt \qquad (2.2)$$

Với T_i là hằng số thời gian tích phân

2.1.3 Khâu vi phân

$$y = T_D \frac{dx}{dt} \qquad (2.3)$$

T_D là hằng số thời gian vi phân

2.1.4 Khâu bậc nhất

$$T\frac{dy}{dt} + y = K.x \qquad (2.4)$$

Trong đó: K là hệ số truyền của khâu

T là hằng số thời gian của khâu

Phản ứng của hệ thống tốt hay xấu phụ thuộc vào hệ số K, nhanh hay chậm phụ thuộc vào T.

2.1.5 Khâu bậc hai

$$T^2\frac{dy}{dt}+2\zeta T\frac{dy}{dt}+y(t)=Kx(t) \qquad (2.5)$$

Trong đó: K là hệ số khuếch đại

T là hằng số thời gian

ξ độ suy giảm tín hiệu

Đây là mô hình toán học của mạch RLC.

2.1.6. Khâu bậc n

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^m x}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dx}{dt}+b_m x(t) \qquad (2.6)$$

thông thường n≥m.

2.2. Mô hình trong miền tần số

2.2.1 Khái niệm về phép biến đổi Laplace và ứng dụng

2.2.1.1 Khái niệm và bản chất của phép biến đổi Laplace

Khi sử dụng các phép biến đổi tín hiệu hệ thống từ miền thời gian sang miền khác để thuận tiện trong việc xử lý tín hiệu. Như trong hệ thống liên tục, phép biến đổi Laplace hay được sử dụng để biến đổi từ miền thời gian sang miền tần số phức. Các phương trình vi tích phân sẽ chuyển đổi thành các phương trình đại số thông thường.

Trong các hệ thống rời rạc người ta hay sử dụng phép biến đổi Z để chuyển tín hiệu từ miền thời gian sang miền tần số phức. Trong thực tế, người ta còn sử dụng các phép biến đổi khác để xử lý tín hiệu như giải tương quan, mã hoá có hiệu quả, chống nhiễu.

Thực hiện các phép biến đổi có công cụ toán học như máy tính số, công cụ phổ biến và hiệu quả là phần mềm Matlab hay thực hiện biến đổi bằng tay.

a) Biến đổi Laplace thuận

Định nghĩa 2.1: Gọi F(s) là biến đổi Laplace của hàm f(t), khi đó ta có:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2.7}$$

trong đó:

- $s = \sigma + j\omega$

- e^{-st} là hạt nhân của phép biến đổi.

- F(s) là hàm phức.

- f(t) là hàm biểu diễn trên miền thời gian xác định trên R.

Để thực hiện được biến đổi Laplace hàm f(t) phải là hàm thực và thoả mãn một số điều kiện sau:

- f(t) là hàm gốc khi:

1. f(t) = 0 khi t < 0

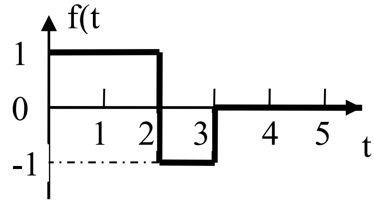
2. f(t) liên tục khi t≥0, trong khoảng hữu hạn bất kỳ cho trước chỉ có hữu hạn các điểm cực trị.

3. Hàm f(t) gọi là hàm bậc số mũ khi t → ∞ nếu tồn tại một số thực α ≥ 0 và M >0 thì $|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \forall t > 0$, α được gọi là chỉ số tăng của hàm f(t). Khi đó hàm f(t) là hàm bậc số mũ nếu hàm f(t) tăng không nhanh hơn hơn hàm e^t.

- Nếu f(t) là hàm gốc có chỉ số tăng α thì tích phân $I = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ sẽ hội tụ trong miền Re(s) = σ > α. Khi đó $I = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$ sẽ là một hàm phức.

Ví dụ 2.1: Tìm ảnh của hàm gốc sau

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{khi } 0\le t<2\\ -1 & \text{khi } 2\le t<3\\ 0 & \text{khi } t\ge 3\end{cases}$$



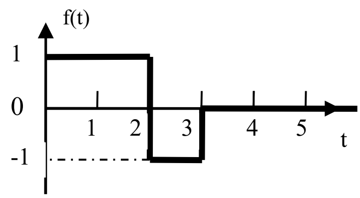
Giải:

Áp dụng công thức biến đổi, ta có:

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^2 e^{-st}f(t)dt-\int_2^3 e^{-st}f(t)dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^2+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_2^3=\frac{1}{s}(1-2e^{-2s}+e^{-3s})$$

Ví dụ 2.2: Cho hàm

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{khi } 0\le t<2\\ -1 & \text{khi } 2\le t<3\\ 0 & \text{khi } t\ge 3\end{cases}$$



Tìm biến đổi Laplace?

Giải:

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}$$

Ví du 2.3: Tìm ảnh Laplace của hàm $f(t)=4t^2$

Giải:

Từ bảng biến đổi Laplace ta có

$$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

Áp dụng biến đổi tìm ảnh Laplace của hàm $f(t) = 4t^2$

$$L\left\{4t^2\right\} = 4\frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{8}{s^3}$$

b) Biến đổi Laplace ngược:

Biến đổi Laplace ngược là xác định tín hiệu f(t) từ ảnh Laplace F(s) của nó.

Gọi f(t) là gốc của ảnh F(s) Khi đó ta có:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds \tag{2.8}$$

Tuy nhiên, công thức (2.8) này ít dùng, phương pháp biến đổi ngược hàm F(s) có dạng hàm hữu tỷ hay được áp dụng.

Giả sử f(t) có ảnh Laplace dạng sau :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} \tag{2.9}$$

với $n \geq m$.

Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Phân tích F(s) thành tổng các hàm phân thức tối giản

$$F(s) = A + \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{r_k}\frac{A_{ki}}{(s-a_k)^i} + \sum_{k=1}^{q}\frac{B_k(s-\sigma_k) + C_k\omega_k}{(s-\sigma_k)^2 + \omega_k^2} \tag{2.10}$$

trong đó A, A_{ki}, B_k, C_k là các hằng số. a_k là điểm cực thực bội r_k và $\sigma_k + j\omega_k$ là điểm cực phức của F(s), nói cách khác chúng là điểm mà tại đó $F(s) = \pm\infty$.

Bước 2: Xác định hàm gốc cho từng phần tử.

- $L^{-1}\left\{A\right\} = A\delta(t)$ (2.11)

- $L^{-1}\left\{\dfrac{A_{ki}}{(s-a_k)^i}\right\} = A_{ki}\dfrac{t^{i-1}e^{a_k t}}{(i-1)!}1(t)$ (2.12)

- $L^{-1}\left\{\dfrac{B_k(s-\sigma_k)}{(s-\sigma_k)^2+\omega_k^2}\right\} = B_k e^{\sigma_k t}\cos(\omega_k t)1(t)$ (2.13)

- $L^{-1}\left\{\dfrac{C_k\omega_k}{(s-\sigma_k)^2+\omega_k^2}\right\} = C_k e^{\sigma_k t}\sin(\omega_k t)1(t)$ (2.14)

Ví dụ 2.4: Tìm hàm gốc f(t) của ảnh Laplace sau

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} \tag{2.15}$$

Giải:

Bước 1: Phân tích thành tổng các phân thức tối giản

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \tag{2.16}$$

Bước 2: Xác định hàm gốc cho từng thành phần

$$f(t) = (e^{-t} - 1 + t)1(t) \tag{2.17}$$

Ví dụ 2.5:

$$F(s) = \frac{s^3+2s^2+6s+7}{s^2+s+2} \tag{2.18}$$

Ta thực hiện chia tử số cho mẫu số cho đến khi số dư còn lại có bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu.

$$F(s) = s+1+\frac{2}{s^2+s+2} \tag{2.19}$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược có sử dụng bảng biến đổi Laplace

$$f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) + \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + s + 5}\right\} \qquad (2.20)$$

Sử dụng phương pháp phân tích $X(s) = \dfrac{2}{s^2 + s + 5}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Ta xét một số trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nghiệm của mẫu thức T(s) là thực và riêng biệt. Giả sử nghiệm của mẫu thức T(s) có hai nghiệm s_1 = -1 và s_2 = - 2.

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \qquad (2.21)$$

Nghiệm của mẫu thức là riêng biệt nên từng phân thức sẽ có bậc là

$$1.\ X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} \qquad (2.22)$$

Để tìm K_1 ta nhân (2.22) với (s+1) để tách K_1 riêng ra

$$\frac{2}{(s+2)} = K_1 + \frac{(s+1)K_2}{(s+2)} \qquad (2.23)$$

Sau đó cho s → - 1, rút ra được K_1 = 2. Làm tương tự và cho s → - 2 ta rút ra được K_2 = - 2.

Khi đó

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \qquad (2.24)$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược của X(s) ta được

$$x(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) \qquad (2.25)$$

Một cách tổng quát khi mẫu số của F(s) có nghiệm thực và riêng biệt, ta thực hiện như sau:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)\cdots(s+p_n)}$$
$$=\frac{K_1}{(s+p_1)}+\frac{K_2}{(s+p_2)}+\cdots+\frac{K_m}{(s+p_m)}+\cdots+\frac{K_n}{(s+p_n)} \qquad (2.26)$$

Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu ta thực hiện tìm các hệ số K_i như sau:

- Nhân hai vế với $(s + p_i)$ để tìm hệ số K_i.

- Cho $s \to - p_i$, rút ra được K_i.

Trường hợp 2: Mẫu số có nghiệm thực và lặp lại. Giả sử nghiệm của mẫu thức T(s) có ba nghiệm $s_1 = -1$ và $s_{2,3} = - 2$. Lúc đó ta phân tích X(s) như sau:

$$X(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{(s+2)^2}+\frac{K_3}{(s+2)} \qquad (2.27)$$

Tìm các hệ số K_1, K_2 và K_3

$$K_1=\left.\frac{2}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=2$$

Để tìm K_2 ta nhân hai vế của (2.27) với $(s + 2)^2$

$$\frac{2}{(s+1)}=\frac{(s+2)^2K_1}{s+1}+K_2+(s+2)K_3 \qquad (2.28)$$

Khi cho $s \to - 2$ ta tìm được $K_2 = - 2$

Tìm K_3 bằng cách lấy đạo hàm (2.28) theo biến s ta có

$$\frac{-2}{(s+1)^2}=\frac{(s+2)s}{(s+1)^2}K_1+K_3$$

Cho $s \to - 2$ ta rút ra được $K_3 = - 2$.

Thay K_1, K_2 và K_3 ta có

$$X(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+2)^2}-\frac{2}{(s+2)} \quad (2.29)$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược ta được

$$x(t)=(2e^{-t}-2te^{-2t}-2e^{-2t})u(t) \quad (2.30)$$

Tổng quát cho trường hợp này

$$\begin{aligned} F(s)&=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &=\frac{K_1}{(s+p_1)^r}+\frac{K_2}{(s+p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_r}{(s+p_1)}+\frac{K_r}{(s+p_2)}+\cdots+\frac{K_n}{(s+p_n)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Để thực hiện được phải có điều kiện bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu và có r nghiệm bội tại - p_1. Để tìm K_1 đến K_r cho phân thức có nghiệm bội, đầu tiên ta nhân hai vế (2.31) với $(s + p_1)^r$ ta có

$$\begin{aligned} F_1(s)&=(s+p_1)^r F_1(s)=\frac{(s+p_1)^r B(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &=K_1+(s+p_1)K_2+(s+p_1)^2K_3+\cdots+(s+p_1)^{r-1}K_r+ \\ &+\frac{(s+p_1)^r K_{r+1}}{(s+p_2)}+\cdots+\frac{(s+p_1)^r K_n}{(s+p_n)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ta có thể tìm ngay được K_1 khi cho s → - p_1. Để tìm K_2 ta lấy đạo hàm (2.31) theo biến s và cho s → - p_1. Lần lượt lấy đạo ta tìm được K_3 đến K_r. Công thức chung để tìm K_1 đến K_r là:

$$K_i=\frac{1}{(i-1)!}\left.\frac{d^{i-1}F_1(s)}{ds^{i-1}}\right|_{s=-p_1} \qquad i=\overline{1,r}; \qquad 0!=1 \quad (2.33)$$

Trường hợp 3: Mẫu thức có nghiệm phức hay nghiệm ảo. Giả sử mẫu số của F(s) có nghiệm phức.

$$F(s)=\frac{3}{s(s^2+2s+5)} \quad (2.34)$$

F(s) có thể phân tích thành các phân thức như sau

$$\frac{3}{s(s^2+2s+5)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2 s+K_3}{s^2+2s+5} \qquad (2.35)$$

Dễ dàng tìm được $K_1 = 3/5$ khi cho $s \rightarrow 0$. Để tìm K_2 và K_3 ta quy đồng phân thức với mẫu số chung nhỏ nhất là $s(s^2+2s+5)$; bỏ được các phân thức

$$3=\left(K_2+\frac{3}{5}\right)s^2+\left(K_3+\frac{6}{5}\right)s \; +3 \qquad (2.36)$$

Thực hiện đồng nhất thức hai vế ở tử số, ta có

$$\left(K_2+\frac{3}{5}\right)=0 \rightarrow K_2=-\frac{3}{5}$$
$$\left(K_3+\frac{6}{5}\right)=0 \rightarrow K_3=-\frac{6}{5}$$

Thay các hệ số ta được

$$F(s)=\frac{3}{s(s^2+2s+5)}=\frac{3/5}{s}-\frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5} \qquad (2.37)$$

Từ bảng tra ảnh của tích hàm mũ và hàm sin và cos

$$\mathcal{L}\left\{Ae^{-at}\cos\omega t\right\}=\frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad (2.38)$$

Và

$$\mathcal{L}\left\{Be^{-at}\sin\omega t\right\}=\frac{B\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad (2.39)$$

Cộng hai công thức trên ta có

$$\mathcal{L}\left\{Ae^{-at}\cos\omega t+Be^{-at}\sin\omega t\right\}=\frac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad (2.40)$$

Ta đưa công thức (2.37) về dạng trên

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2} \tag{2.41}$$

Tra bảng ta tìm được hàm gốc như sau

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \tag{2.42}$$

Trong trường hợp trên ta cũng có thể thưc hiện đơn giản bằng cách phân tích thông thường

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j2)(s+1-j2)} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j2} + \frac{K_3}{s+1-j2} \end{aligned} \tag{2.43}$$

K_1 dễ dàng tính được và bằng 3/5.

$$K_2 = \left.\frac{3}{s(s+1-j2)}\right|_{s\to -1-j2} = \frac{3}{20}(2+j) \tag{2.44}$$

Tương tự ta tìm được K_3 là nghiệm phức liên hợp của K_2.

Ta có

$$F(s) = \frac{3/5}{s} + \frac{3}{20}\left(\frac{2+j}{s+1+j2} + \frac{2-j}{s+1-j2}\right) \tag{2.45}$$

Từ đó ta tìm được hàm gốc như sau:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{3}{5} - \frac{3}{20}\left[(2+j)e^{-(1+2j)} + (2-j)e^{-(1-2j)t}\right] \\ &= \frac{3}{5} - \frac{3}{20}e^{-t}\left[4\left(\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}\right) + 2\left(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.46}$$

Áp dụng công thức ơle của hàm sin và cos

$$\cos 2t = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2}$$
$$\sin 2t = \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} \qquad (2.47)$$

Suy ra

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \qquad (2.48)$$

Biến đổi Laplace một số hàm đơn giản:

x(t)	X(s)	X(t)	X(s)
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{ab} - \frac{e^{-at}}{a(b-a)} - \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
1(t)	$\frac{1}{s}$	$\frac{t^{n-1}e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
tu(t)	$\frac{1}{s^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

2.2.1.2 Các tính chất của phép biến đổi Laplace

1. Tính chất tuyến tính: L[a.f(t)]= a.L[f(t)] = a.F(s).

2. Tính chất xếp chồng: Nếu $f_1(t)$ và $f_2(t)$ có ảnh biến đổi Laplace là $F_1(s)$ và $F_2(s)$ thì ta có:

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

Ví dụ 2.6: Tìm ảnh của hàm hàm f(t) = cosat trong đó a là hằng số.

Theo công thức Ơle ta có

$$\cos at = \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2} = \frac{1}{2}e^{jat} + \frac{1}{2}e^{-jat} \tag{2.49}$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\{\cos at\} &= \mathrm{L}\left\{\frac{1}{2}e^{jat} + \frac{1}{2}e^{-jat}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-ja} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+ja} = \frac{1}{2}\frac{s+ja+s-ja}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Bản chất của tính tuyến tính là bao gồm tính chất 1 và 2, tức là:

L{af1+bf2} = aL{f1}+ bL{f2}

3. Tính chất dịch chuyển thời gian

Nếu f(t) có ảnh là F(s), a là một số thực và f(t-a) =0 khi 0<t<a thì:

$$L[\, f(t- a)\,] = e^{-as} F(s) \tag{2.51}$$

Ví dụ 2.7: Tìm ảnh Laplace của hàm gốc có đồ thị như sau

Ta có f(t) = [h(t)-h(t-1)]+2[h(t-1)-h(t-2)]-[h(t-2)-h(t-3)] (2.52)

Áp dụng tính chất trễ ta có

$$\begin{aligned} F(s) &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right] + 2\left[\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s}\right] - \left[\frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s}\right] \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{3}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-3s} \\ &= \frac{1+e^{-s} - 3e^{-2s} + e^{-3s}}{s} \end{aligned} \tag{2.53}$$

4. Tính chất đạo hàm ảnh

Nếu f(t) có ảnh là F(s) thì:

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s) \quad (2.54)$$

Ví dụ 2.8: $L[t.e^{-at}] = - dL[e^{-as}]/ds = - d[1/(s+a)]/ds = 1/ (s+a)^2$

5. Tính chất chuyển dịch tần số

Nếu f(t) có ảnh là F(s), a là một số thực bất kỳ hay là một số phức khi đó:

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s + a) \quad (2.55)$$

6. Tính chất đạo hàm gốc

Nếu f(t) có ảnh là F(s) thì :

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0^+) \quad 2.56)$$

7. Tính chất tích phân gốc

Nếu F(s) là ảnh của f(t) thì

$$L[\int_0^t f(x)dx] = \frac{F(s)}{s} \quad (2.57)$$

8. Tính chất giá trị cuối:

Nếu biến đổi Laplace của f(t) là F(s) và nếu giới hạn f(t) tồn tại khi $t \to \infty$ khi đó: $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$

9. Tính chất giá trị đầu: Nếu tồn tại $\lim_{t\to 0} f(t)$ thì

$$f(+0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \quad (2.58)$$

2.2.1.3 Ứng dụng của phép biến đổi Laplace

a) Ứng dụng giải phương trình vi phân tuyết tính.

Khi chuyển phương trình vi phân từ miền thời gian sang miền ảnh phức trở thành phương trình đại số. Sau khi giải ra được nghiệm, ta chuyển ngược về miền thời gian.

Ví dụ 2.9: Giải phương trình vi phân sau với các sơ kiện đầu đều bằng không.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+12\frac{dy}{dt}+32y=32 \qquad (2.59)$$

chuyển sang miền ảnh Laplace với y(0-) = 0 và $\dot{y}(0-)=0$

$$s^2Y(s)+12sY(s)+32Y(s)=\frac{32}{s} \qquad (2.60)$$

Rút Y(s) ra ta được

$$Y(s)=\frac{32}{s(s^2+12s+32)}=\frac{32}{s(s+4)(s+8)} \qquad (2.61)$$

Phân tích Y(s) thành tổng các phân thức tối giản

$$Y(s)=\frac{32}{s(s+4)(s+8)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+4}+\frac{K_3}{s+8} \qquad (2.62)$$

Tìm các hệ số K_1, K_2 và K_3.

$$K_1=\left.\frac{32}{(s+4)(s+8)}\right|_{s=0}=1$$

$$K_1=\left.\frac{32}{s(s+8)}\right|_{s=-4}=-2$$

$$K_1=\left.\frac{32}{(s+4)s}\right|_{s=-8}=1$$

Vậy

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+4}+\frac{1}{s+8} \qquad (2.63)$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược ta tìm được

$$y(t)=(1-2e^{-4t}+e^{-8t})u(t) \qquad (2.64)$$

Trong công thức trên có chứa u(t) nói lên rằng các đáp ứng sẽ bằng 0 cho đến khi t = 0. Vì vậy các đáp ứng đầu ra cũng bằng 0 cho đến kho t = 0. Để thuận tiện ta có thể bỏ ký hiệu u(t) đi, vậy đáp ứng đầu ra có thể viết như sau

$$y(t) = 1 - 2e^{-4t} + e^{-8t} \tag{2.65}$$

Ví dụ 2.10: Giải phương trình vi phân bằng toán tử Laplace sau

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \tag{2.66}$$

với sơ kiện y(0) = a và $\frac{dy(0)}{dt} = b$

Chuyển cả hai vế sang miền ảnh phức nhờ toán tử Laplace

$$\left[s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}\right] + 3\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 3s + 2)Y(s) = as + (3a + b)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{as + (3a+b)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{as + (3a+b)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a+b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}$$

(2.69)

Thực hiện biến đổi Laplace ngược rút ra được y(t)

$$y(t) = (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \text{ với } t \geq 0. \tag{2.70}$$

Ví dụ 2.11: Giải phương trình vi phân sau

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3$$

(2.71)

với sơ kiện $y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0$

Thực hiện biến đổi Laplace

$$\Leftrightarrow (s^2+2s+5)Y(s)=\frac{3}{s}$$

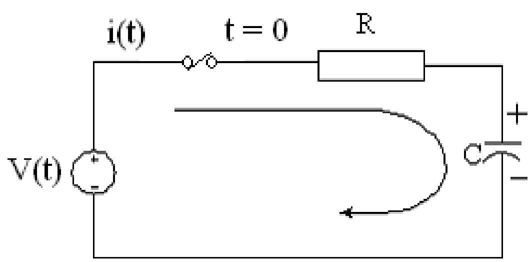
$$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{3}{s^2+2s+5}=\frac{3}{5s}-\frac{3\times 2}{10\left[(s+1)^2+2^2\right]}-\frac{3(s+1)}{5\left[(s+1)^2+2^2\right]} \quad (2.72)$$

Suy ra

$$y(t)=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}e^{-t}\sin(2t)-\frac{3}{5}e^{-t}\cos(2t) \text{ với t } \geq 0. \quad (2.73)$$

b) Giải mạch điện

Ví dụ 2.12: Cho mạch điện sau



Giả sử khi mạch điện đóng tại thời điểm t =— 0 thì $v_C(0) = 1.0V$. Tìm dòng điện i(t) chạy trong mạch điện. (*trong đó V(t) = 5V, C = 1µF, R = 1k*Ω)

<u>Giải:</u>

Ta có phương trình sau

$$v(t)=Ri+\frac{1}{C}\int i dt \quad (2.74)$$

hay

$$Cv(t)=RCi+\int i dt \quad (2.75)$$

thay các thông số đầu bài đã cho vào

$$
\begin{aligned}
&5.10^{-6} = 10^{3}.10^{-6}\,i + \int idt \\
&\Leftrightarrow 5.10^{-6} = 10^{-3}\,i + \int idt
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace

$$
\frac{5.10^{-6}}{s} = 10^{-3} I + \left(\frac{I}{s} + \frac{\left[\int idt\right]_{t=0}}{s} \right) \tag{2.77}
$$

Theo đầu bài $v_C(0) = 1.0V$ nên ta có

$$
\begin{aligned}
&V_C(0) = \frac{1}{C}\left[\int idt\right]_{t=0} = \frac{1}{10^{-6}}\left[\int idt\right]_{t=0} = 1 \\
&\Rightarrow \left[\int idt\right]_{t=0} = 10^{-6}
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

Thay $V_C(0)$ vào công thức (2.77) ta có

$$
\begin{aligned}
&\frac{5.10^{-6}}{s} = 10^{-3} I + \left(\frac{I}{s} + \frac{10^{-6}}{s} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{s} + 10^{-3} \right) I = \frac{5.10^{-6}}{s} - \frac{10^{-6}}{s} = \frac{4.10^{-6}}{s} \\
&\Leftrightarrow \left(1 + 10^{-3} s\right) I = 4.10^{-6} \\
&\Leftrightarrow I = \frac{4.10^{-6}}{1 + 10^{-3} s} = 4.10^{-3} \frac{1}{s + 1000}
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

Thực hiện tra bảng biến đổi Laplace ta tìm được i(t) như sau

$$
i(t) = 4.10^{-3} e^{-1000t} \tag{2.80}
$$

2.2.2 Hàm số truyền của hệ thống ĐKTĐ

Nhằm đơn giản hoá các phương pháp phân tích và tổng hợp hệ thống tự động người ta thường chuyển phương trình động học của hệ ở dạng phương trình vi phân viết với các nguyên hàm x(t), y(t) thành phương trình viết dưới dạng các hàm số X(s), Y(s) thông qua phép biến đổi Laplace.

Ví dụ 2.13: xét hàm số x(t) – hàm số của biến số t (biến số thực, ở đây t là thời gian) ta gọi là nguyên hàm. Ta cho phép biến đổi hàm số x(t) thông qua tích phân:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t).e^{-st}.dt$$

(2.81)

trong đó: s = α+ jβ - biến số phức, biến đổi (2.81) hàm x(t) thành hàm biến số X(s) được gọi là là biến Laplace và X(s) được gọi hàm ảnh. Như vậy hàm ảnh là một hàm biến số phức s. Phép biến đổi Laplace được ký hiệu sau:

L{x(t)}=X(s) hoặc x(t) → X(s)

Giả sử nguyên hàm x(t) có các điều kiện ban đầu không, tức là với t=0 giá trị của hàm x(t) và các bậc đạo hàm $d^i x(t) / dt_i$ với i = 1, 2, 3, …, (n-1) đều bằng 0, tính theo tính chất của phép biến đổi Laplace (định lý về đạo hàm gốc) chúng ta có:

$$L\left\{ a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \right\} = a_i . s^i . X(s) \quad (2.82)$$
$$i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

Nhân hai vế của phương trình (2.82) với e^{-st}, sau đó lấy tích phân theo t từ 0 đến ∞, tức là lấy biến đổi Laplace của hai vế phương trình, với giả thiết rằng các hàm x(t), y(t) có các điều kiện ban đầu bằng 0, dựa theo tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplace , phương trình (2.82) sẽ có dạng:

$$\begin{aligned} & a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = \\ & = b_0 s^n X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + \cdots + b_{m-1} X(s) + b_m X(s) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ở đây, Y(s), X(s) – là các biến đổi Laplace của hàm lượng ra và hàm lượng vào của hệ.

Phương trình (2.83) được gọi là phương trình động học mô tả quan hệ vào ra của hệ viết dưới dạng toán tử Laplace. Đây là phương trình đại số, với n và m là các số mũ của biến số s giải phương trình (2.83) ứng với lượng ra Y(s).

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} X(s) \quad (2.84)$$

Chúng ta ký hiệu:

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.85)$$

và gọi biểu thức đại số này là hàm số truyền (hoặc hàm truyền đạt) của hệ thống tự động (hay của một phần tử của nó).

Khi đó $$Y(s) = W(s)X(s) \quad (2.86)$$

Hoặc $$W(s) = Y(s) / X(s) \quad (2.87)$$

Vậy hàm truyền đạt của hệ thống (hay của một phần tử) tự động là tỷ số hàm ảnh của lượng ra với hàm ảnh của lượng vào của nó (qua phép biến đổi Laplace) với giả thiết tất cả các điều kiện đều bằng không.

Biểu thức (2.85) cho chúng ta thấy, hàm truyền đạt là một hàm phân số hữu tỷ của biến s, có bậc các đa thức thoả mãn $m \le n$. Giả thiết điều kiện ban đầu của các hàm lượng vào và lượng ra đều bằng không là phù hợp với điều kiện thường gặp trong các hệ thống điều khiển tự động.

Phương trình (2.86) cho phép xác định hàm ảnh của lượng ra nếu biết hàm ảnh của lượng vào và biểu thức hàm truyền đạt của hệ. Như vậy hàm truyền đạt hoàn toàn xác định các tính chất động học của hệ thống. Để xác định nguyên hàm của lượng ra, tức là xác định y(t) khi biết x(t) có thể biến đổi ngược Laplace, theo đó:

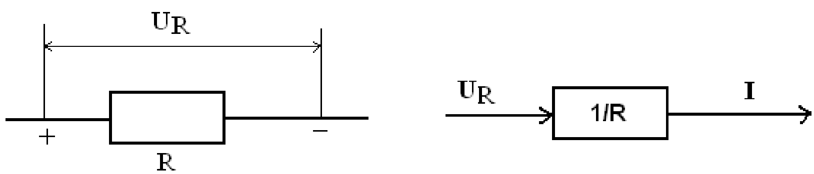
$$y(t) = L^{-1}\left[Y(s)\right] = \frac{1}{2\pi j} \sum_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} Y(s).e^{st} ds \quad (2.88)$$

Đó là phương pháp toán tử để giải phương trình vi phân. Nếu Y(s) là hàm đơn giản, chúng ta có thể sử dụng bảng biến đổi Laplace của các hàm đơn giản điển hình, có trong phụ lục các sách nói về biến đổi Laplace, để tra cứu nguyên hàm y(t). Nếu hàm ảnh Y(s) là hàm phức tạp, cần phân tích chúng thành tổ hợp tuyến tính các hàm đơn giản, mà chúng ta đã biết nguyên hàm của nó. Nguyên hàm y(t) chính là tổ hợp tuyến tính của các nguyên hàm thành phần.

2.2.3 Hàm truyền đạt của mạch điện

Trong mạch điện có các phần tử cơ bản là điện trở (R), điện cảm (L) và tụ điện (C).

a) Điện trở R



Hình 2.4: Điện trở và sơ đồ khối

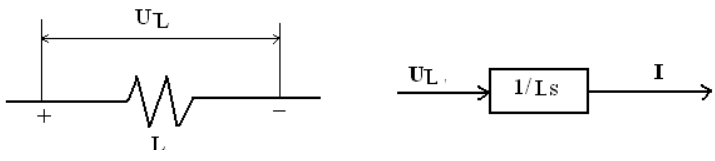
Điện áp rơi tỷ lệ thuận với cường độ dòng điện *i(t)* chạy qua điện trở:

$$v(t) = Ri \qquad\qquad i(t) = \frac{1}{R}v(t) \qquad\qquad Z = R$$

Thông qua phép biến đổi Laplace ta có được hàm truyền của điện trở là

$$G_R = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} \tag{2.89}$$

b) Điện cảm L



Hình 2.5 : Điện cảm L và sơ đồ khối

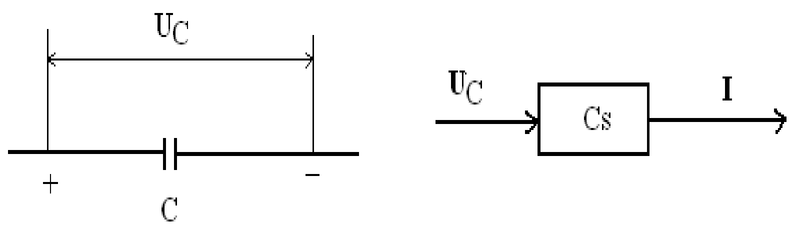
Điện áp rơi trên điện cảm là

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int_0^{\tau} v(t)dt \qquad (2.90)$$

Thông qua biến đổi Laplace ta tính được trở kháng Z và hàm truyền của điện cảm L

$$Z = Ls \qquad G_L = \frac{I}{U_L} = \frac{1}{Ls} \qquad (2.91)$$

c) Tụ điện C



Hình 2.6: Tụ điện C và sơ đồ khối

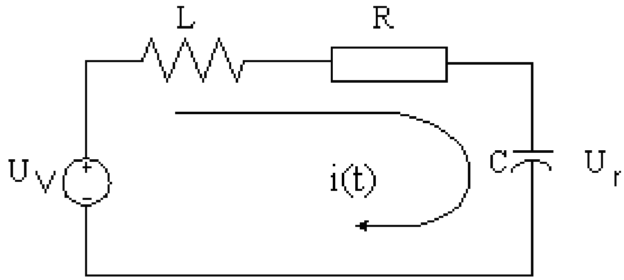
Điện áp rơi trên điện dung là

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^{\tau} i(t)dt \Rightarrow i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad (2.92)$$

Trở kháng và hàm truyền đạt của tụ điện

$$Z = \frac{1}{C} \qquad G_C = \frac{I}{U_C} = Cs \qquad (2.93)$$

d) Các phần tử R, L và C mắc nối tiếp



Hình 2.7: Sơ đồ các phần tử mạch điện RLC mắc nối tiếp

$$U_V = Ri + L\frac{di}{dt} + U_r$$

$$U_r = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} idt \Rightarrow i = C\frac{dU_r}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C\frac{d^2U_r}{dt^2} \qquad (2.94)$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2U_r}{dt^2} + RC\frac{dU_r}{dt} + U_r = U_V$$

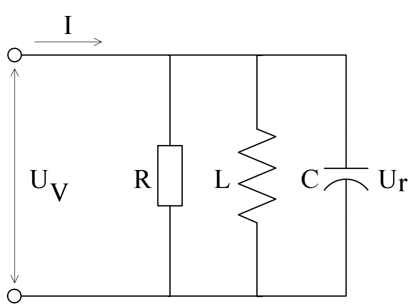
Thực hiện phép biến đổi Laplace ta có

$$(LCs^2 + RCs + 1)\, U_r = U_v \qquad (2.95)$$

Rút ra được hàm truyền là:

$$G(s) = \frac{U_r}{U_V} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \qquad (2.96)$$

e) Các phần tử mắc song song



Hình 2.8: Sơ đồ các phần tử mạch điện RLC mắc song song

Dòng điện của mạch điện là

$$I = \frac{U}{Z} \tag{2.97}$$

Tổng trở của mạch song song được tính là

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + \frac{1}{1/Cs} = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{RLs} \tag{2.98}$$

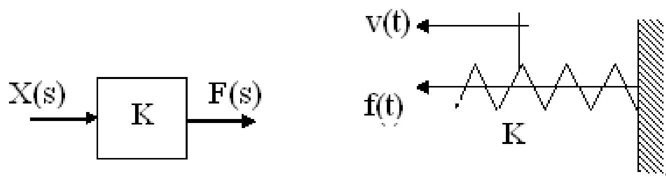
Hàm truyền của hệ thống là

$$G(s) = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z} = \frac{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{\frac{1}{C}s} \tag{2.99}$$

2.2.4 Hàm truyền của hệ thống cơ khí

2.2.4.1 Phần tử chuyển động thẳng

a) Lò xo



Hình 2.9: Sơ đồ biểu diễn lò xo

trong đó: K là hệ số đàn hồi của lò xo

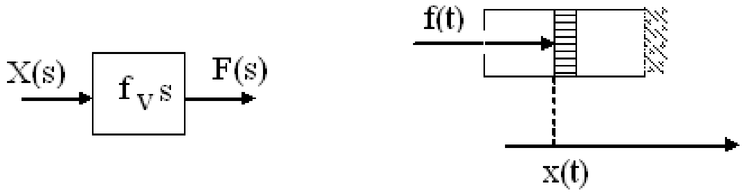
Nếu ta ấn lò xo có chiều dài L, di động được một lượng X thì cần một lực tác động lên là

$$F(t) = Kx(t) \tag{2.100}$$

Thông qua biến đổi Laplace ta có hàm truyền của lò xo như sau:

$$G_{loxo} = \frac{F(s)}{X(s)} = K \tag{2.101}$$

b) Bộ giảm chấn dầu ép (không khí)



Hình 2.10: Sơ đồ biểu diễn bộ giảm chấn dầu ép

Để di động pít tông với vận tốc v, ta cần tác động lên một lực là f

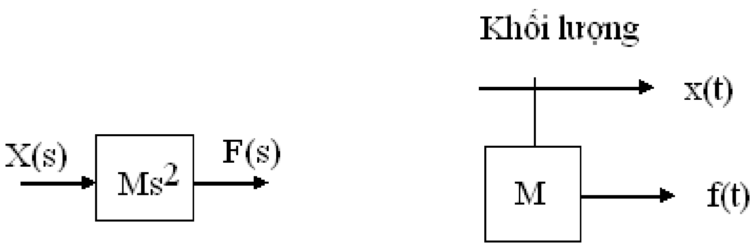
$$f(t) = f_v v(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt} \tag{2.102}$$

trong đó f_v là hệ số giảm chấn

Thực hiện biến đổi Laplace

$$G_{VD} = \frac{F(s)}{X(s)} = f_v s \tag{2.103}$$

c) Trọng khối



Hình 2.11: Sơ đồ biểu diễn trọng khối

Theo định luật II Newton tổng các lực ở bên ngoài tác động vào một trọng khối sẽ bằng tích của trọng khối và gia tốc ta có

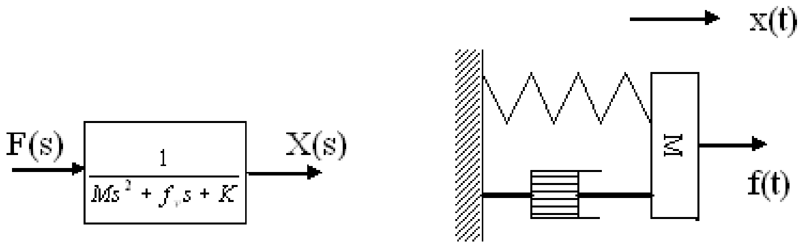
$$\sum f = Ma = M\frac{dv(t)}{dt} = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{2.104}$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace ta có hàm truyền của trọng khối là

$$G_M = \frac{F(s)}{X(s)} = Ms^2 \qquad (2.105)$$

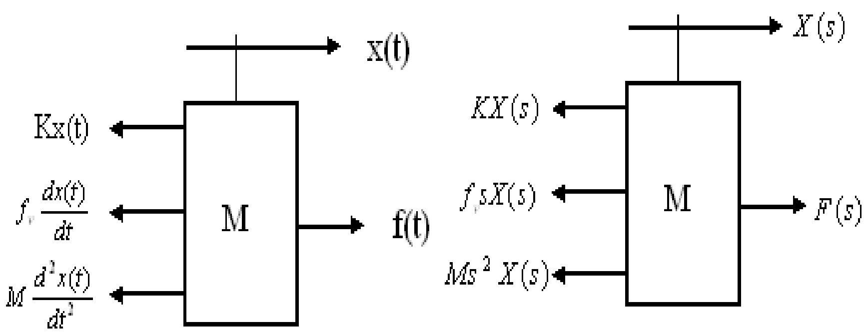
d) Thiết bị giảm chấn

Thiết bị giảm chấn bao gồm trọng khối – lò x0 - bộ giảm chấn



Hình 2.12: Sơ đồ biểu diễn thiết bị giảm chấn

Để tìm được hàm truyền của hệ thống trước tiên ta vẽ biểu diễn các lực tác động trọng khối



Hình 2.13: Sơ đồ biểu diễn lực tác động lên trọng khối

Sử dụng định luật Newton để viết phương trình chuyển động

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f_v\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t) \qquad (2.106)$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace

$$\left(Ms^2 + f_v s + K\right)X(s) = F(s) \qquad (2.107)$$

Từ đó ta rút ra hàm truyền của hệ thống là

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K} \tag{2.108}$$

2.2.4.2 Phần tử chuyển động quay

Theo định luật II Newton về chuyển động quay thì gia tốc góc của vật quay tỉ lệ thuận với tổng momen tác động lên nó, ta có phương trình sau

$$\Sigma M = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{2.109}$$

trong đó:

J là mômen quán tính tác động lên vật.

φ là vị trí góc quay của vật thể.

M là mô men tác động lên vật.

Các mômen bên ngoài được tạo bởi động cơ do tải trọng tác động của lò xo hoặc vật giảm chấn. Hình biểu diễn sơ đồ của một đĩa quay trong chất lỏng làm cho trục lắp trên nó bị biến dạng đi một góc φ.

Nếu ta quay đĩa với mômen xoắn x, trục sẽ quay đi một góc φ tạo nên mômen của lò xo xoắn:

$$M_1 = k\varphi \tag{2.110}$$

Mômen cần thiết để thắng lực ma sát của chất lỏng:

$$M_2 = C\frac{d\varphi}{dt} \tag{2.111}$$

trong đó C là hệ số ma sát của chất lỏng

Như vậy ta có phương trình:

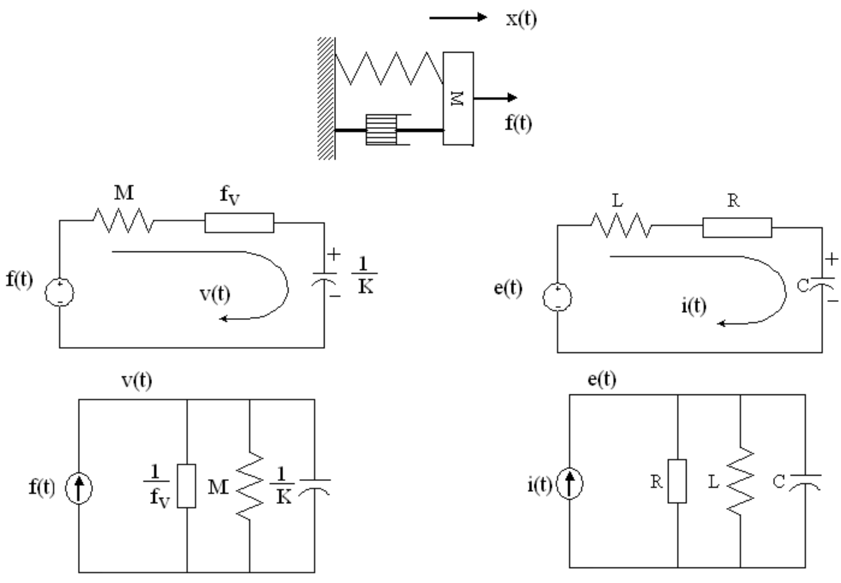
$$\sum M = x - M_1 - M_2 = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{2.112}$$

Thay vào ta được:

$$x = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + C\frac{d\varphi}{dt} + k\varphi \tag{2.113}$$

2.2.5 Sự tương đương giữa hệ cơ khí với một mạch điện

Sự tương đương giữa mạch cơ khí và mạch điện trọng khối = M ↔ điện cảm = M bộ giảm chấn = f_v ↔ điện trở = $1/f_v$ lò xo = K↔ điện dung = 1/ K lực tác động = f(t) ↔ nguồn áp = f(t) vận tốc = v(t)↔ dòng vòng = v(t)



Hình 2.14: Sơ đồ biểu diễn sự tương đương giữa mạch cơ khí và mạch điện

Khi so sánh với dòng vòng ta có mạch tương đương nối tiếp, nếu dùng phương pháp nút, thì mạch tương đương đương là mạch song song.

Phương trình chuyển động là

$$(Ms^2 + f_v s + K)X(s) = F(s) \tag{2.114}$$

Đối với mạch RLC nối tiếp là

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = E(s) \tag{2.115}$$

Hai công thức trên không tương thích với nhau do khoảng cách và dòng điện không tương thích với nhau. Ta biến đổi sự tương thích bằng cách chuyển đổi từ khoảng cách sang vận tốc

$$\frac{Ms^2 + f_v s + K}{s} sX(s) = (Ms + f_v + \frac{K}{s})V(s) = F(s) \tag{2.116}$$

Ta cũng có thể chuyển đổi sang hệ song song

trọng khối = M ↔ điện cảm = M

bộ giảm chấn = f_v ↔ điện trở = $1/f_v$

lò xo = K ↔ điện dung = 1/ K

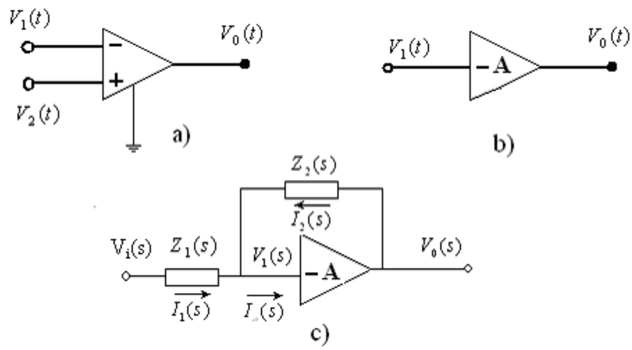
lực tác động = f(t) ↔ nguồn dòng = f(t)

vận tốc = v(t) ↔ điện áp nút = v(t)

Công thức mạch song song là

$$(Cs + \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls})E(s) = I(s) \tag{2.117}$$

2.2.6 Hàm số truyền đạt của các phần tử điện tử



Hình 2.15: Biểu diễn phần tử khuếch đại thuật toán

- Sai lệch điện áp đầu vào: $v_2(t) - v_1(t)$.

- Trở kháng đầu vào cao: $Z_1 = \infty$ (lý tưởng).

- Trở kháng đầu ra thấp: $Z_0 = 0$ (lý tưởng).

- Hệ số khuếch đại cao $A = \infty$ (lý tưởng).

Điện áp đầu ra được tính là

$$v_0(t) = A(v_2(t) - v_1(t)) \tag{2.118}$$

Nếu $v_2(t)$ được nối đất thì bộ khuếch đại được gọi là khuếch đại đảo.

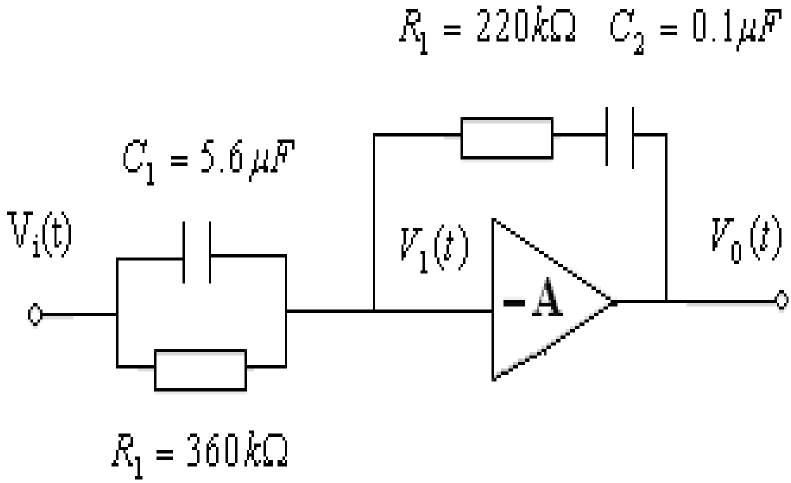
Lúc đó $v_0(t) = -A\, v_1(t)$.

Trong hình 2.15 c, nếu trở kháng đầu vào cao thì ta có $I_a(s) = 0$ suy ra $I_1(s)=-I_2(s)$. Khi hệ số khuếch đại A lớn, $v_1(t) = 0$ thì $I_1(s) = V_1(s)/Z_1(s)$ và $- I_2(s) = - V_0(s)/Z_2(s)$.

Cho hai dòng điện này bằng nhau ta có

$$\frac{V_0(s)}{Z_2(s)} = -\frac{V_1(s)}{Z_1(s)} \text{ hay là } \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \tag{2.119}$$

Ví dụ 2.14 : Tìm hàm truyền của mạch khuếch đại đảo sau



Hình 2.16 Sơ đồ hệ thống khuếch đại đảo

Tổng trở $Z_1(s)$ là

$$Z_1(s) = \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_1}} = \frac{1}{5.6x10^{-6}s + \frac{1}{360x10^3}} = \frac{360x10^3}{2.016s + 1}$$

(2.120)

Tổng trở $Z_2(s)$ là

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = 220x10^3 + \frac{10^7}{s} \qquad (2.121)$$

Thay $Z_1(s)$ và $Z_2(s)$ vào công thức (2.119).

$$\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -1.232\frac{s^2 + 45.951s + 22.547}{s} \qquad (2.122)$$

2.3 Mô hình toán học trong miền thời gian

2.3.1 Khái niệm trạng thái và biến trạng thái

2.3.1.1 Khái niệm về trạng thái

Khái niệm trạng thái có trong cơ sở của cách tiếp cận hiện đại trong mô tả động học của các hệ thống đã được Turing lần đầu tiên đưa ra năm 1936. Sau đó khái niệm này được các nhà khoa học ở Nga và Mỹ ứng dụng rộng rãi để giải các bài toán điều khiển tự động.

Trạng thái của hệ thống được đặc trưng như là lượng thông tin tối thiểu về hệ, cần thiết để xác định hành vi của hệ trong tương lai khi biết tác động vào. Nói một cách khác, trạng thái của hệ được xác định bởi tổ hợp các toạ độ mở rộng đặc trưng cho hệ.

Trạng thái của một hệ thống là tập hợp nhỏ nhất các biến (gọi là biến trạng thái) mà nếu biết giá trị của các biến này tại thời điểm t_0 và biết các tín hiệu vào thời điểm $t>t_0$ ta hoàn toàn có thể xác định được đáp ứng của hệ thống tại mọi thời điểm $t>t_0$.

Hệ thống bậc n có n biến trạng thái. Các biến trạng thái có thể chọn là biến vật lý hoặc không phải là biến vật lý.

Theo quan điểm phân tích và tổng hợp hệ thống thường, người ta chia các biến đặc trưng hệ thống hay có quan hệ nhất định với nó và các nhóm như sau:

- Các biến vào hay các tác động vào u_i được tạo ra bởi các hệ thống nằm ngoài các hệ được xét.

- Các biến ra y_i đặc trưng cho đáp ứng của hệ theo các biến vào đã định.

- Các biến trung gian x_i đặc trưng trạng thái bên trong của hệ.

2.3.1.2 Khái niệm véc tơ trạng thái

n biến trạng thái hợp thành véc tơ cột

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \qquad (2.123)$$

gọi là véc tơ trạng thái.

- Không gian trạng thái: không gian n chiều là không gian hợp bởi các trục của các biến trạng thái.

Ta có các biến trạng thái điện áp của điện trở v_R (các phần tử tụ và cuộn dây mới có trạng thái) và điện áp của tụ điện v_C các biến này sẽ hình thành 2 trục của không gian trạng thái.

Để thuận lợi trong thao tác với các đại lượng nhiều chiều, tổ hợp các biến vào có thể trình bày dưới dạng véc tơ các tác động vào:

$$u(t) = \left[u_1(t) \quad u_2(t) \quad \ldots \quad u_n(t)\right]^T \qquad (2.124)$$

Tổ hợp các biến ra trình bày dưới dạng véctơ ra

$$y(t) = \left[y_1(t) \quad y_2(t \quad \ldots. \quad y_n(t)\right]^T$$

(2.125)

Các tổ hợp các toạ độ trung gian, đặc trưng nội dung bên trong của hệ được viết dạng véc tơ trạng thái của hệ.

$$x = \left[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n\right]^T \qquad (2.126)$$

Theo định nghĩa trạng thái của hệ tại thời điểm bất kỳ $t > t_0$, trạng thái của hệ là một hàm của trạng thái ban đầu $x(t_0)$và véc tơ vào $r(t_0,t)$, tức là:

$$x(t) = F[x(t_0),u(t_0,t)] \qquad (2.127)$$

Véc tơ ra tại thời điểm t có quan hệ đơn trị với $x(t_0)$ và $u(t_0,t)$

$$y(t) = \Psi[x(t_0),u(t_0,t)] \qquad (2.128)$$

Các phương trình (2.127) và (2.128) thường gọi là phương trình trạng thái của hệ.

Nếu hệ thống được mô tả bởi các phương trình vi phân tuyến tính thì phương trình trạng thái của hệ được viết dưới dạng sau: (*Bằng cách sử dụng các biến trạng thái, ta có thể chuyển phương trình vi phân bậc n mô tả hệ thống thành hệ gồm n phương trình vi phân bậc nhất*)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t).u(t) \\ y(t) = C(t).x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (2.129)$$

trong đó: $\underline{x}$ (n x1) véc tơ các biến trạng thái,

$\underline{u}$ (m x 1) véc tơ các biến đầu vào

$\underline{y}$ (r x 1) véc tơ các biến đầu ra.

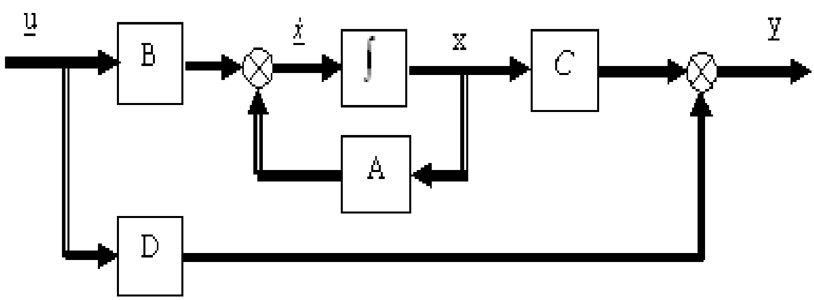
A(t) - Ma trận hệ thống.

B(t) - Ma trận điều khiển hay mạ trận đầu vào.

C(t) - Ma trận ra.

D(t) - Ma trận vòng.

Các ma trận có các phần tử phụ thuộc vào biến t, lần lượt có kích thước là: A(n x n), B(n x m), C(r x n), D(r x m).



Hình 2.17: Sơ đồ khối biểu diễn hệ thống điều khiển trong không gian trạng thái

Thực tế các hệ thống thức đều có tính quán tính, do đó D là một ma trận có các phần tử đều bằng không.

2.3.2 Hệ tuyến tính hệ số hằng.

Hệ thống có mô hình trạng thái là:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} \end{aligned} \tag{2.130}$$

Trong đó các ma trận A, B, C và D là các ma trận hằng số.

A được gọi là ma trận hệ thống. Nếu s làm cho phương trình det(sI - A) = 0 thì s được gọi là giá trị riêng của ma trận A (đây chính là điểm cực của hệ thống). I là ma trận đơn vị, s là một số phức, det là kí hiệu của phép tính định thức ma trận.

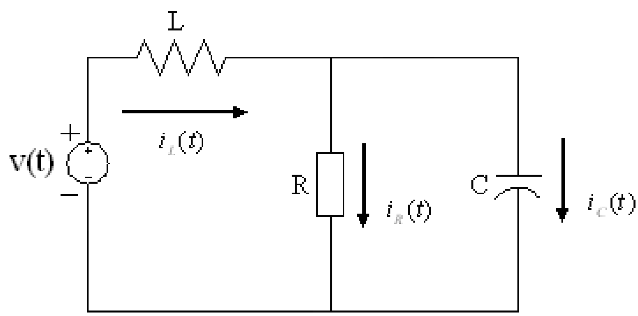
2.3.3 Ứng dụng biểu diễn mô hình toán học trên không gian trạng thái

Ứng dụng hệ phương trình trạng thái để biểu diễn các hệ vật lý phức tạp. Bước đầu tiên là chọn véctơ trạng thái, việc lựa chọn này phải tuân theo các yêu cầu sau:

- Các biến trạng thái phải là tối thiểu nhưng vẫn phải đảm bảo biểu diễn đầy đủ trạng thái của hệ thống.

- Các biến trạng thái phải độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2.15: Cho hệ thống vật lý có sơ đồ như sau:



Hình 2.18: Sơ đồ mạch RLC mắc hỗn hợp

Xây dựng mô hình trạng thái cho đối tượng.

Giải:

Bước 1: Đặt tên các dòng điện nhánh bao gồm i_R, i_L và i_C.

Bước 2: Chọn các biến trạng thái bằng các viết phương trình vi phân cho các phần tử chứa năng lượng bao gồm tụ điện C và điện cảm L

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C \qquad L\frac{di}{dt} = v_L \tag{2.131}$$

Ta chọn i_L và v_C là các biến trạng thái, nhưng do i_C và v_L không phải là các biến trạng thái nên ta phải viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các biến trạng thái i_L và v_C , biến đầu vào là v(t).

Bước 3: Sử dụng lý thuyết về mạch điện cụ thể là viết phương trình dựa vào định luật Kirchhoff. Tại nút 1 ta có

$$\begin{aligned} i_C &= -i_R + i_L \\ &= -\frac{1}{R}v_C + i_L \end{aligned} \tag{2.132}$$

Mặt khác ta có

$$v_L = - v_C + v(t) \tag{2.133}$$

Bước 4: Thay công thức trên với nhau ta thu được công thức như sau:

$$\begin{aligned} C\frac{dv_C}{dt} &= -\frac{1}{R}v_C + i_L \\ L\frac{di}{dt} &= \quad -v_C \quad + v(t) \end{aligned} \tag{2.134}$$

hoặc

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{C}i_L \\ \frac{di}{dt} &= \quad -\frac{1}{L}v_C \quad + \frac{1}{L}v(t) \end{aligned} \tag{2.135}$$

Bước 5: Rút ra công thức của tín hiệu đầu ra $i_R(t)$

$$i_R = \frac{1}{R} v_C \tag{2.136}$$

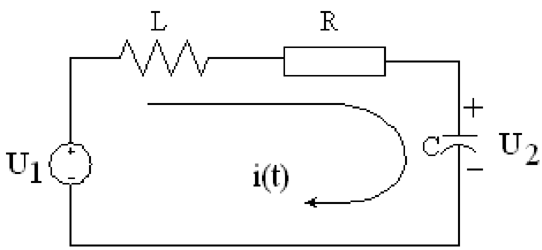
kết quả cuối cùng là

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t) \tag{2.137}$$

tín hiệu đầu ra

$$i_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} \tag{2.138}$$

Ví dụ 2.16: Cho mạch điện gồm ba phần tử R, Lvà C mắc nối tiếp



Hình 2.19: Sơ đồ mạch RLC mắc nối tiếp

U_1 là điện áp đặt vào mạch, U_2 là điện áp ra. Tìm mô hình trạng thái của hệ thống.

Giải:

Ta có phương trình điện áp của mạch là:

$$u_1 = u_R + u_L + u_C \tag{2.139}$$

thay các công thức tính điện áp của các phần tử

$$u_1 = i\mathrm{R} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + u_2 \tag{2.140}$$

trong đó $u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int idt$ (2.141)

Trạng thái của mạch được quyết định bởi điện áp ra u_2 và dòng điện i. Ta gọi u_2 và i là các biến trạng thái.

Đặt:

$u_2 = x_1$

$i = x_2$

Từ công thức (2.140) và (2.141) ta rút ra công thức tính dòng điện là

$$\begin{aligned} & i = C\frac{du_2}{dt} && x_1 = \frac{1}{C}x_2 \\ & \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}u_2 + \frac{1}{L}u_1 && x_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_1 \end{aligned} \qquad (2.145)$$

Dạng chính tắc được viết như sau:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.x_1 + \frac{1}{C}x_2 + 0.u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L}x - \frac{R}{L}x + \frac{1}{L}u_1 \end{aligned} \qquad (2.146)$$

Viết hệ trên dưới dạng véctơ ma trận

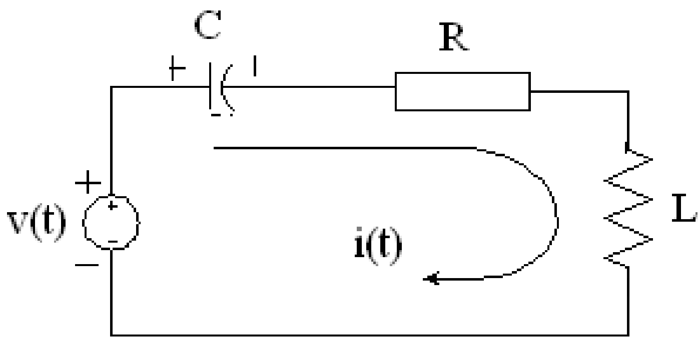
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_1 \qquad (2.147)$$

hay viết gọn lại

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \qquad (2.148)$$

gọi là phương trình trạng thái của hệ thống. Không gian hai chiều gồm trạng thái dòng điện $i = x_2$ và điện áp trên tụ là $u_2 = x_1$ được gọi là không gian trạng thái.

Ví dụ 2.17:



Hình 2.20: Sơ đồ mạch RLC mắc nối tiếp

Tìm mô hình trạng thái của mạch.

<u>Giải:</u>

Ta có

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = v(t) \tag{2.149}$$

Thay $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ vào công thức trên ta được:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t) \tag{2.150}$$

Ta đặt i(t), q(t) là các biến trạng thái

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= i \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v(t) \end{aligned} \tag{2.151}$$

viết dưới dạng véctơ ma trận

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} v \qquad (2.152)$$

Điện áp v_L là biến trạng thái đầu ra

$$v_L = -\frac{1}{C} q - Ri + v \qquad (2.153)$$

$$\text{hay } v_L = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C} & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} + u \qquad (2.154)$$

2.4 Chuyển từ hàm truyền đạt sang không gian trạng thái và ngược lại

2.4.1 Chuyển từ hàm truyền đạt sang không gian trạng thái

Để có thể mô phỏng được một hệ thống trên máy tính thì mô hình toán học của đối tượng hay hệ thống nhiều đầu vào và nhiều đầu ra phải được biểu diễn trên không gian trạng thái. Vì vậy khi ta đã có mô hình của đối tượng biểu diễn bằng hàm truyền đạt ta phải chuyển sang phương trình trạng thái.

- Chọn các biến trạng thái, mỗi biến trạng thái được xác định bởi đạo hàm của biến trạng thái trước đó.

- Ta xét phương trình vi phân sau:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{ni1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u \qquad (2.156)$$

Cách thuận tiện chọn biến trạng thái là chọn biến đầu ra

$$
\begin{aligned}
&x_1 = y \\
&x_2 = \frac{dy}{dt} \\
&x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2} \\
&... \\
&x_{n-1} = \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} \\
&x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}
\end{aligned}
\qquad (2.157)
$$

Lấy đạo hàm hai vế công thức (2.157)

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} \\
&\dot{x}_2 = \frac{d^2 y}{dt^2} \\
&\dot{x}_3 = \frac{d^3 y}{dt^3} \\
&... \\
&\dot{x}_{n-1} = \frac{d^n y}{dt^n}
\end{aligned}
\qquad (2.158)
$$

Biểu diễn trên không gian trạng thái

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 \\
&\dot{x}_2 = x_3 \\
&\dot{x}_3 = x_4 \\
&... \\
&\dot{x}_{n-1} = x_n \\
&\dot{x}_n = -a_0 x_1 - -a_1 x_2 ... - a_{n-1} x_n + -b_0 u
\end{aligned}
\qquad (2.159)
$$

Biểu diễn dưới dạng véctơ ma trận

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (2.160)$$

Viết phương trình trạng thái đầu ra

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

Các bước thực hiện biến đổi từ hàm truyền sang hệ phương trình trạng thái:

- **B1:** Chuyển từ hàm truyền về phương trình vi phân và thực hiện phép biến đổi Laplace ngược với các điều kiện đầu bằng không.

- **B2:** Thực hiện chọn các biến trạng thái và biểu diễn trong không gian trạng thái.

Ví dụ 2.18: Một đối tượng có hàm truyền đạt là $W(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{25}{s^2 + 5s + 4}$.

Xây dựng mô hình trạng thái cho đối tượng. Xác định các giá trị riêng.

<u>**Giải**</u>

Bước 1: Tìm phương trình vi phân

$$C(s).(s^2 + 5s + 4) = 25.R(s) \qquad \Rightarrow \frac{d^2c}{dt^2} + 5\frac{dc}{dt} + 4c = 25r \quad (2.163)$$

Bước 2: Lựa chọn các biến trạng thái

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = \dfrac{dc}{dt} = \dot{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 25r - 4x_1 - 5x_2 \end{cases} \qquad (2.164)$$

Viết đưới dạng véctơ ma trận

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} .\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases} \qquad (2.165)$$

Tìm giá trị riêng:

$$\text{sI - A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+5 \end{bmatrix} \qquad (2.166)$$

$$\det(\text{sI - A}) = s(s + 5) + 4 = s^2 + 5s + 4 = 0 \qquad (2.167)$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \qquad (2.168)$$

Các giá trị riêng là s_1 = -1, s_2 = -4 và là các điểm cực của hàm truyền.

Ví dụ 2.19: Cho hàm truyền sau:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \qquad (2.169)$$

Chuyển đổi sang hệ phương trình trạng thái.

<u>Giải:</u>

Bước 1: Tìm phương trình vi phân

Thực hiện phép nhân chéo

$$\left(s^3 + 9s^2 + 26s + 24\right)C(s) = 24R(s) \qquad (2.170)$$

Chuyển đổi thành phương trình vi phân bằng cách dùng phép biến đổi Laplace ngược với điều kiện đầu bằng 0.

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r \tag{2.171}$$

Bước 2: Lựa chọn biến trạng thái

Chọn các biến trạng thái như sau:

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ x_2 &= \dot{c} \\ x_3 &= \ddot{c} \end{aligned} \tag{2.172}$$

Lấy đạo hàm cả hai vế phương trình (2.172) ta sẽ thu được hệ phương trình trạng thái

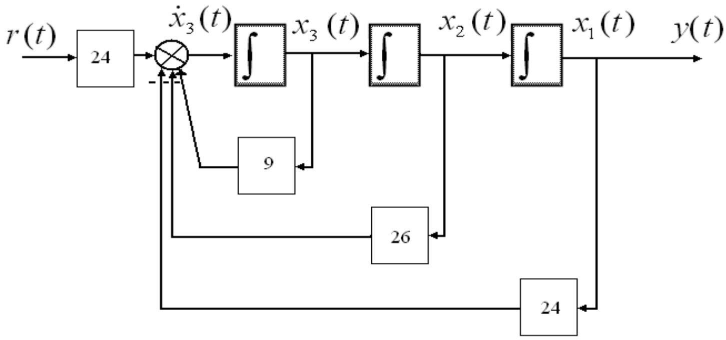
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24r \\ y &= c = x_1 \end{aligned} \tag{2.173}$$

Viết dưới dạng véctơ ma trận

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2.174}$$

Mô hình được biểu diễn như sau:



Hình 2.22: Sơ đồ biểu diễn bằng sơ đồ khối trong gian trạng thái

2.4.2 Chuyển từ không gian trạng thái sang hàm truyền đạt

Mô hình toán học trong gian trạng thái được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u}\\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u}\end{aligned} \qquad (2.175)$$

Thực hiện chuyển đổi Laplace với các điều kiện đầu bằng 0

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \qquad (2.176)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \qquad (2.177)$$

Từ (2.176) rút X(s) ra:

$$(sI – A)X(s) = BU(s) \qquad (2.178)$$

$$X(s) = (sI – A)^{-1}BU(s) \qquad (2.179)$$

Trong đó I là ma trận đơn vị

Thay X(s) vào (2.177):

$$Y(s) = C(sI – A)^{-1}BU(s) + DU(s) \qquad (2.180)$$

Ta gọi $[C(sI – A)^{-1}BU(s) + DU(s)]$ là ma trận hàm truyền bởi vì nó quan hệ với véctơ biến ra Y(s) và véctơ biến vào U(s).

Nếu U(s) = *U(s)* và Y(s) = *Y(s)* là các đại lượng vô hướng ta có thể tìm hàm truyền như sau:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI\_A)^{-1}B+D \tag{2.181}$$

Vi dụ 2.20: Cho phương trình trạng thái biết đầu ra là Y(s) và đầu vào là U(s)

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}&=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix}u\\ y&=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\underline{x}\end{aligned} \tag{2.182}$$

Giải: Từ đầu bài ta xác định các ma trận A, B, C và D

$$\begin{aligned}A&=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix} & B&=\begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix}\\ C&=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix} & D&=0\end{aligned} \tag{2.183}$$

Ta tìm $(sI - A)^{-1}$

$$(sI-A)=\begin{bmatrix}s&0&0\\0&s&0\\0&0&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\1&2&s+3\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{\det(sI-A)}=\frac{\begin{bmatrix}s^2+3s+2&s+3&1\\-1&s(s+3)&s\\-s&-(2s+1)&s^2\end{bmatrix}}{s^3+3s^2+2s+1} \tag{2.184}$$

Thay $(sI - A)^{-1}$, B, C, D vào ta được hàm truyền

$$T(s)=\frac{10(s^2+3s+2)}{s^3+3s^2+2s+1} \tag{2.185}$$

2.5 Sơ đồ khối hệ thống điều khiển

Trên thực tế các hệ thống kỹ thuật được biểu diễn bằng các sô đồ khối rất phức tạp, để tìm được quan hệ giữa tín hiệu đầu vào và đầu ra của hệ thống tức là phải tìm được hàm truyền đạt của hệ thống. Do đó ta phải tìm cách rút gọn hệ thống tìm được hàm truyền chung của toàn bộ hệ thống.

Hình 2.23: Sơ đồ khối của hệ thống

Quy định:

- Kí hiệu tín hiệu đầu vào: R(s).
- Kí hiệu tín hiệu đầu ra: C(s).
- Kí hiệu các hàm truyền con: $G_i(s)$
- Kí hiệu hàm truyền hệ thống: G(s).

Quan hệ của tín hiệu đầu vào và đầu ra được biểu diễn dưới dạng hàm truyền (transferfunction):

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \qquad (2.186)$$

Hai dạng biểu diễn:

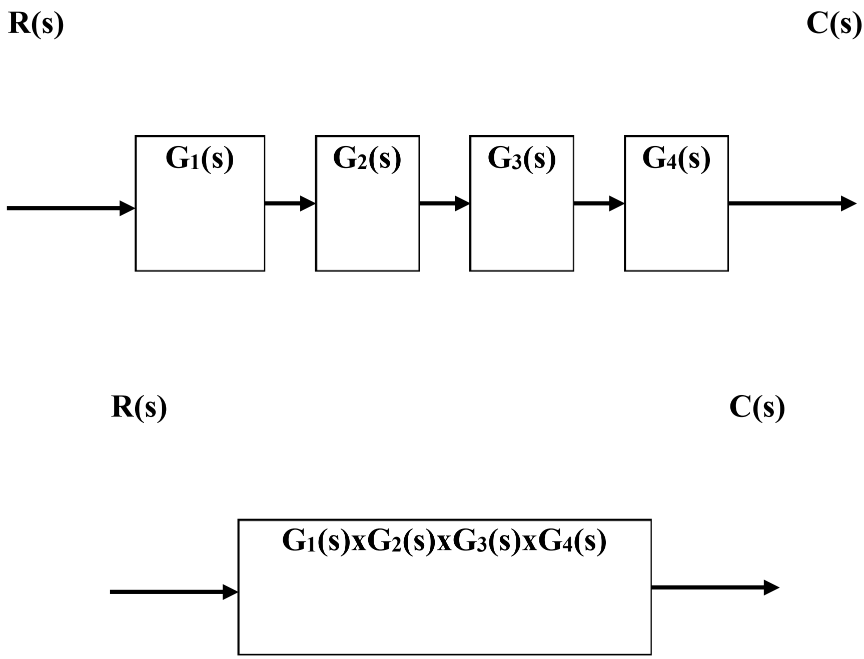
- Sơ đồ khối.
- Đồ hình tín hiệu Graph

2.5.1 Hệ thống dạng nối tiếp

Hệ thống được gọi là mắc nối tiếp nếu tín hiệu ra của phần tử trước là tín hiệu vào của phần tử sau.

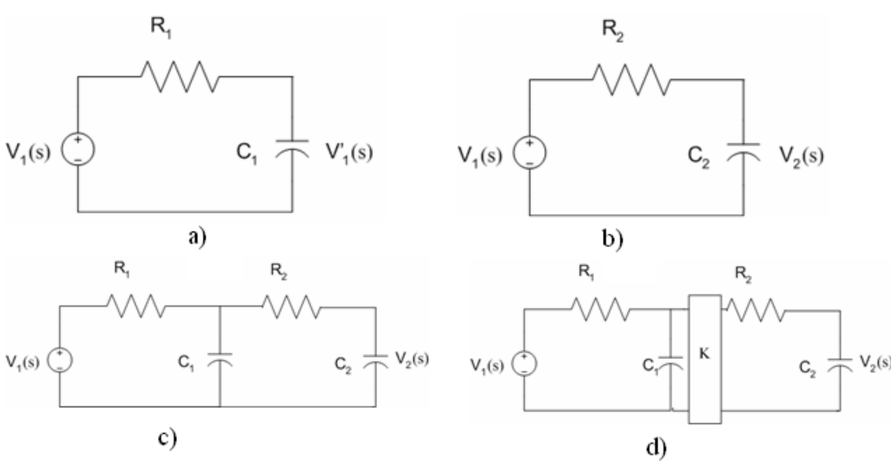
Tín hiệu vào của hệ thống là tín hiệu vào của phần tử đầu tiên.

Tín hiệu ra của hệ thống là tín hiệu ra của phần tử cuối cùng.



Hình 2.24: Sơ đồ khối của hệ thống nối tiếp

Ví dụ 2.21: Ta có mô hình như sau:



Hình 2.25: Hệ thống ghép nối tiếp

Hình 2.25 a) hàm truyền được tính:

$$G_1(s) = \frac{V'_1(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_1C_1}}{s + \frac{1}{R_1C_1}} \tag{2.187}$$

Hình 2.25 b) hàm truyền được tính:

$$G_2(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_2C_2}}{s + \frac{1}{R_2C_2}} \tag{2.188}$$

Hình 2.25 c) ta tính được hàm truyền của hệ thống bằng mạch vòng hoặc theo nút:

$$G_T(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1}\right)s + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}} \tag{2.189}$$

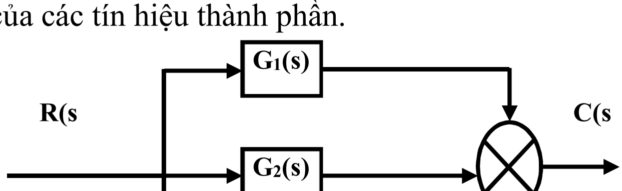
Nhưng nếu tính theo công thức của sơ đồ nối mắc nối tiếp

$$G_T(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = G_2(s)G_1(s) = \frac{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2}\right)s + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}} \tag{2.190}$$

Ta thấy sự khác nhau là do giữa hai hệ thống tồn tại một hệ số tỷ lệ. Để khắc phục giữa hai hệ thống ta mắc thêm một khâu khuếch đại như hình 2.25 d).

2.5.2 Hệ thống dạng song song

Hệ thống mắc song song là hệ thống có tín hiệu vào của hệ thống là tín hiệu vào của các phần tử thành phần, còn tín hiệu ra của hệ thống bằng tổng đại số của các tín hiệu thành phần.



Hình 2.26: Sơ đồ khối của hệ thống mắc song song

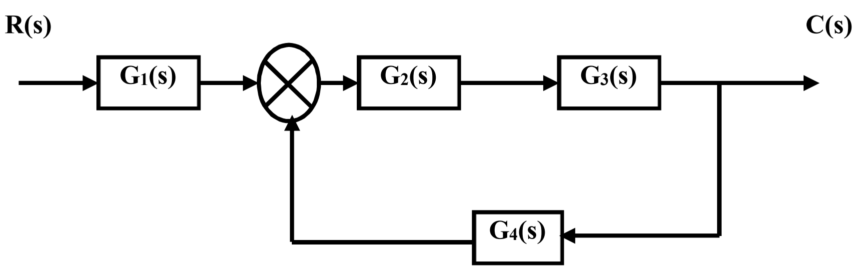
$$C(s) = R(s)\left[G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)\right] \qquad (2.191)$$

2.5.3. Hệ thống dạng phản hồi

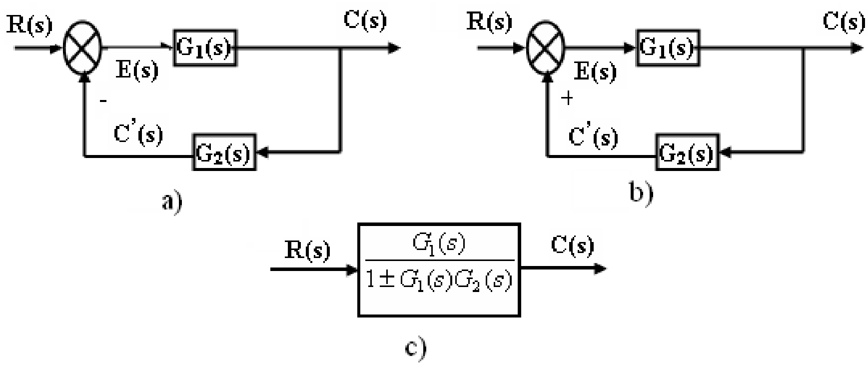
Hệ thống có mạch mắc phản hồi gồm hai mạch: mạch thuận và mạch phản hồi. Tín hiệu ra của mạch thuận là tín hiệu ra của hệ thống và là tín hiệu vào của mạch phản hồi.

Hệ thống có hai dạng phản hồi:

- Phản hồi âm: E(s) = R(s) – C'(s) .
- Phản hồi dương: E(s) = R(s) + C'(s).



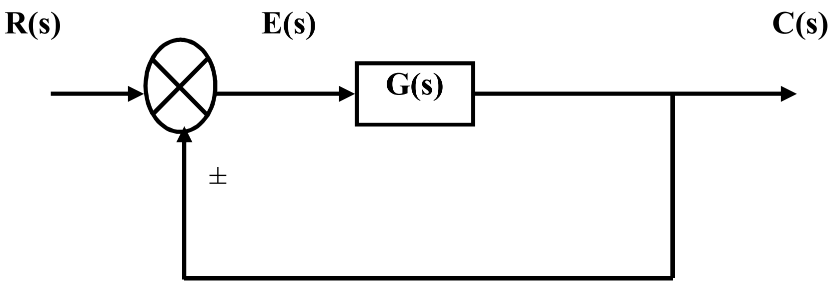
Hình 2.27: Sơ đồ khối của hệ thống có phản hồi



Hình 2.28: a) Hệ thống phản hồi âm b) Hệ thống phản hồi dương

c) Hàm truyền của hệ thống có phản hồi

- Mạch phản hồi đơn vị:



Hình 2.29: Sơ đồ khối hệ thống phản hồi đơn vị

E(s) = R(s) ± C(s) (2.192)

Mặt khác:

$$E(s) = \frac{C(s)}{G(s)} \quad (2.193)$$

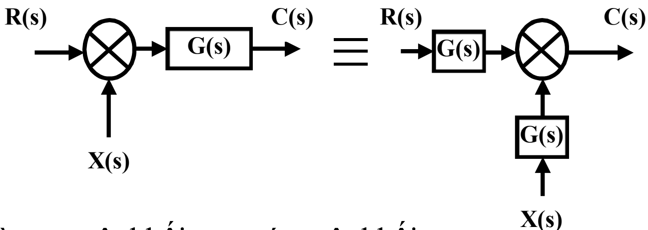
Hàm truyền của hệ thống được tính là:

$$G_e(s) = \frac{G\ (s)}{1 \mp G(s)} \quad (2.194)$$

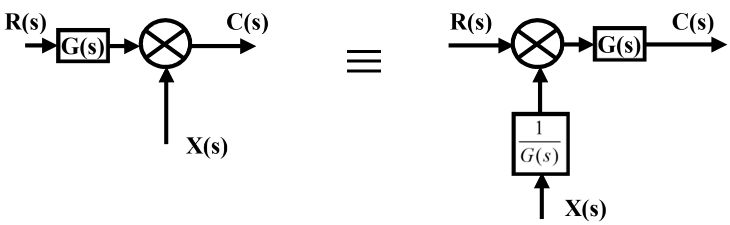
2.5.4 Các phép biến đổi sơ đồ cơ bản:

- *Chuyển tín hiệu đầu vào:*

Từ trước ra sau một khối:

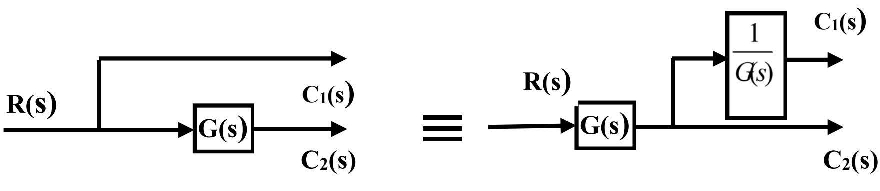


Từ sau một khối ra trước một khối:



- *Chuyển đổi tín hiệu ra:*

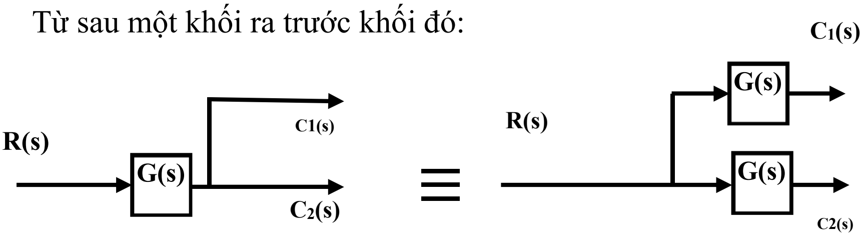
Từ trước một khối ra sau khối đó:



$C_1(s) = R(s)$

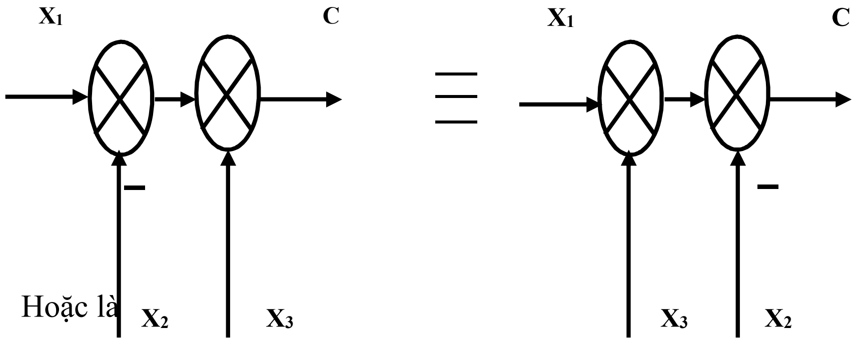
$C_2(s) = R(s).G(s)$

Từ sau một khối ra trước khối đó:

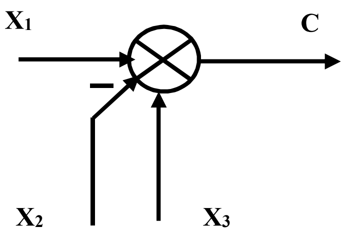


$C_1(s) = C_2(s) = R(s).G(s)$

- Các bộ cộng liền nhau có thể đổi chỗ cho nhau hoặc cộng xếp chồng lại:

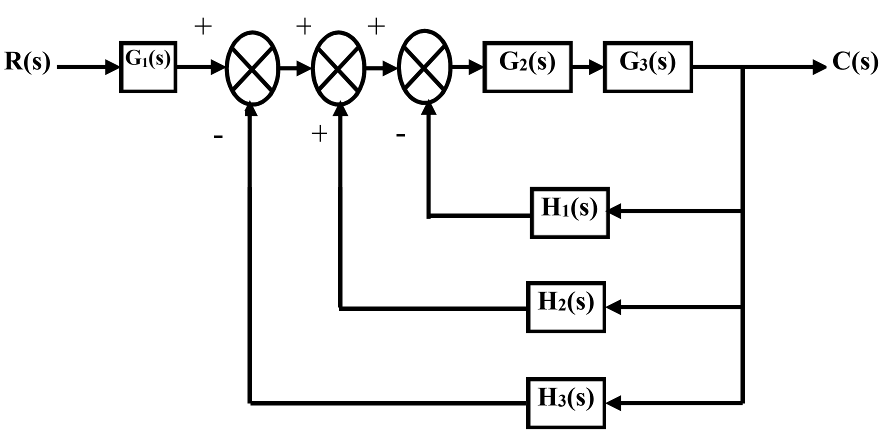


Hoặc là

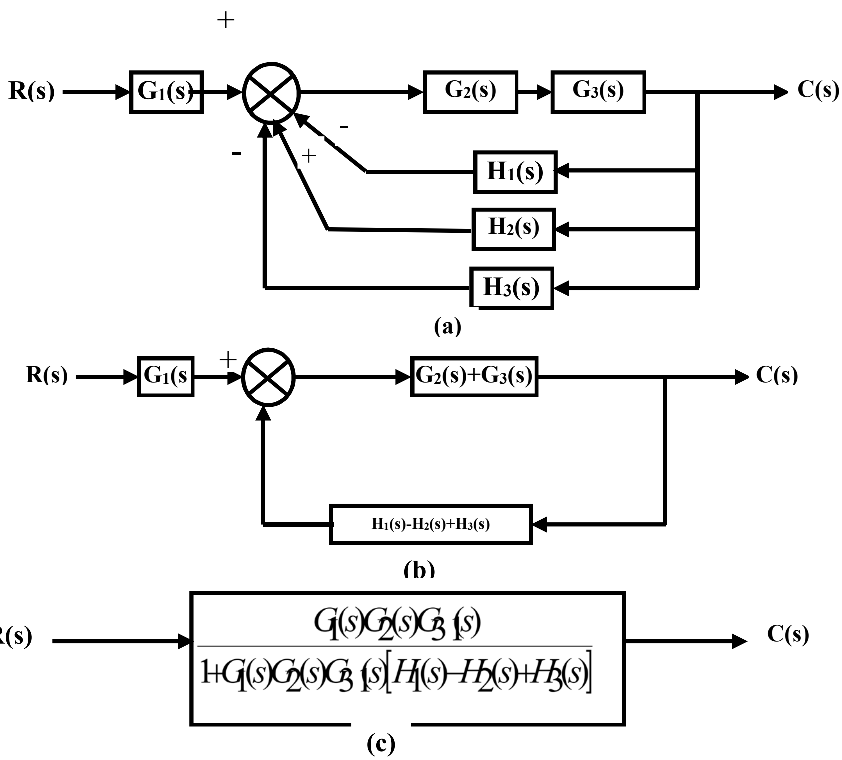


$C = X_1 - X_2 + X_3$

Ví dụ 2.22: Rút gọn hệ thống như hình sau

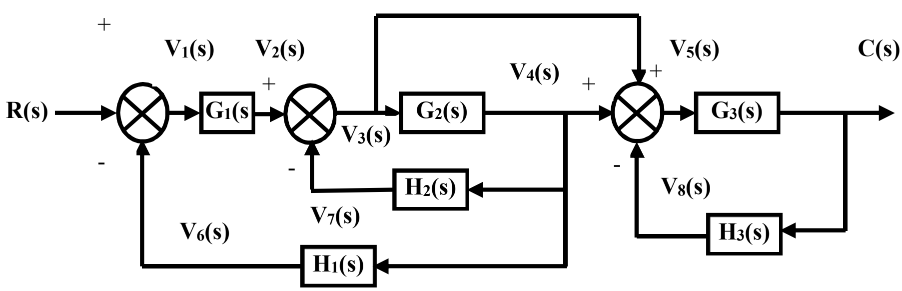


Quá trình rút gọn sơ đồ thực hiện như sau:

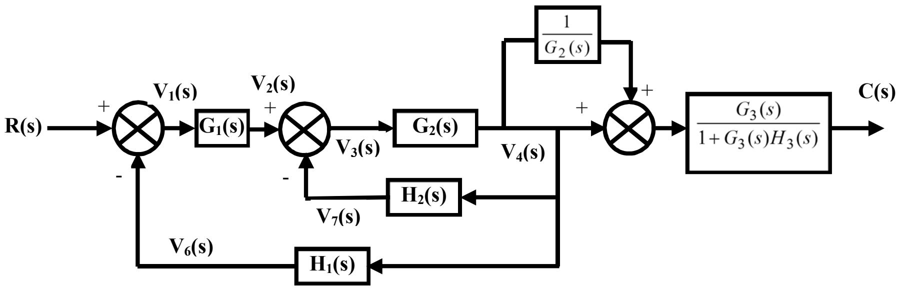


Hình 2.30 : Hình biến đổi các sơ đồ khối cơ bản.

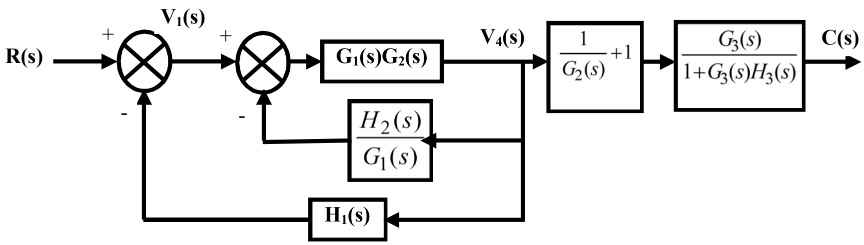
Ví dụ 2.23: Rút gọn sơ đồ khối áp dụng các quy tắc di chuyển tín hiệu



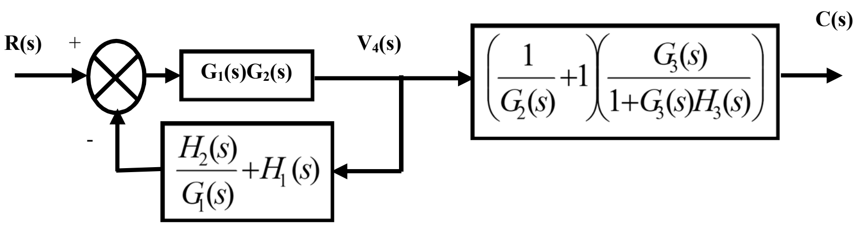
Thực hiện rút gọn sơ đồ khối như sau:



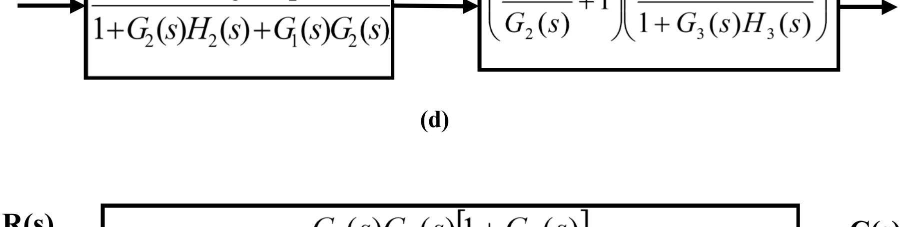
(a)



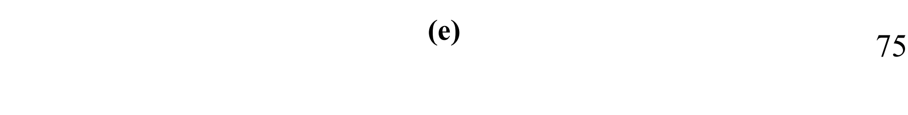
(b)



(c)



(d)



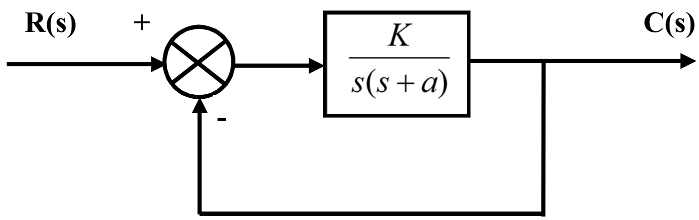
(e)

Hình 2.31: Rút gọn sơ đồ áp dụng các quy tắc biến đổi

2.6 Phân tích và thiết kế hệ thống phản hồi

Mục đích : ứng dụng các quy tắc rút gọn sơ đồ khối hệ thống để phân tích và thiết kế hệ thống bậc 2. Phần trăm độ quá điều chỉnh, thời gian đỉnh, thời gian tăng được tính toán từ hàm truyền của hệ thống.

Xét hệ thống:



Hình 2.32: Hệ thống có phản hồi âm

Đối tượng có hàm truyền là: $$\frac{K}{s(s+a)} \quad (2.195)$$

Hàm truyền của hệ thống được tính là:

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + as + K} \quad (2.196)$$

Trong đó:

K: Hệ số khuếch đại (tỷ lệ giữa điện áp đầu vào và đầu ra)

Khi hệ số K thay đổi, các điểm cực thay đổi qua 3 chế độ hoạt động của hệ thống bậc hai: dao động tắt dần, tắt tắt dần tới hạn và dưới tắt dần. Ví dụ K biến đổi trong rải giữa 0 và $a^2/4$, các điểm cực của hệ thống là thực và được tính toán là:

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4K}}{2} \quad (2.197)$$

Khi hệ số K tăng lên, các điểm cực di chuyển dọc theo trục thực và hệ thống vẫn dao động tắt dần cho đến khi K = $a^2/4$. Tại hệ số khuếch đại này, cả hai nghiệm đều là thực và bằng nhau, hệ thống là tắt dần tới hạn.

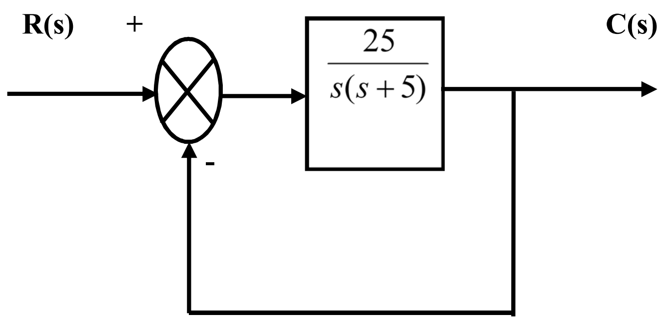
Đối với hệ số khuếch đại lớn hơn $a^2/4$, hệ thống là dưới tắt dần với các nghiệm phức là:

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\frac{\sqrt{4K - a^2}}{2} \tag{2.198}$$

Khi hệ số khuếch đại tăng lên, phần thực là hằng số và phần ảo tăng lên. Do vậy, thời gian đỉnh giảm xuống lên và phần trăm độ quá điều chỉnh tăng lên, trong khi settling time vẫn là hằng số.

- Tính thời gian đáp ứng nhanh.

Ví dụ 2.24: Cho hệ thống sau



Hình 2.33: Sơ đồ khối hệ thống phản hồi biết trước hệ số khuếch đại

Tìm hằng số thời gian đỉnh T_p, phần trăm độ quá điều chỉnh $\sigma\%$ và thời gian T_s

Giải:

Hàm truyền của hệ thống có phản hồi là:

$$T(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25} \tag{2.199}$$

Từ công thức:

$$w_n = \sqrt{b} = \sqrt{25} = 5 \tag{2.200}$$

Mặt khác:

$$a = 2\zeta w_n \text{ với a = 5 ta có } 5 = 2\zeta w_n \tag{2.201}$$

Suy ra $\zeta = 0.5$

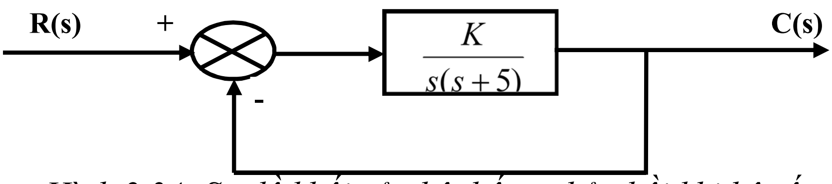
Ta có công thức tính như sau:

$$T_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.726s \tag{2.202}$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2}} x100 = 16.303 \tag{2.203}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta w_n} = 1.6s \tag{2.204}$$

Tìm hệ số khuếch đại của hệ thống khi biết phần trăm độ quá điều chỉnh



Hình 2.34: Sơ đồ khối của hệ thống phản hồi khi hệ số khuếch đại K chưa biết

Hàm truyền của hệ kín là:

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + K} \tag{2.205}$$

Từ công thức các công thức $5 = 2\zeta w_n$ và $w_n = \sqrt{K}$ ta tính được:

$$\zeta = \frac{5}{2\sqrt{K}} \tag{2.206}$$

Như ta đã biết phần trăm độ quá điều chỉnh %OS là hàm của ζ mà ở đây ζ lại là hàm phụ thuộc hệ số K. Do vậy, khi ta thay công thức (2.206) vào công thức tính σ (2.203) , σ lại là hàm phụ thuộc hệ số khuếch đại K.

Với chỉ tiêu chất lượng σ cho trước ta dễ dàng tính được hệ số ζ = 0.591. Thay vào công thức (2.206), ta tìm được hệ số khuếch đại K = 17.892.

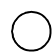
Mặc dù thiết kế theo độ quá điều chỉnh nhưng không thể lựa chọn được thời gian dao động được bởi vì phần thực luôn là -2.5 (không cần tính đến hệ số khuếch đại K).

2.7 Grap tín hiệu

2.7.1 Các khái niệm cơ bản

- Graph là một đồ hình gồm các nhánh và các nút.

- Mỗi nút của Graph được biểu diễn bằng một điểm và ghi tên một đại lượng nào đó trong hệ thống điều khiển.

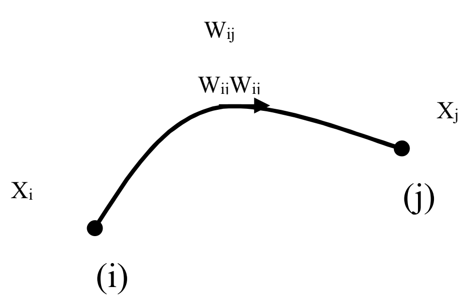


V(s)

Hình 2.35: Một nút cơ bản

- Nút gốc là lượng vào, nút ngọn là lượng ra của một khâu nào đó.

- Một nhánh nối nút gốc và nút ngọn có mũi tên, trên đó ghi giá trị của hàm truyền đạt tương ứng với một khâu nào đó.



Hình 2.36: Biểu diễn một nhánh cơ bản

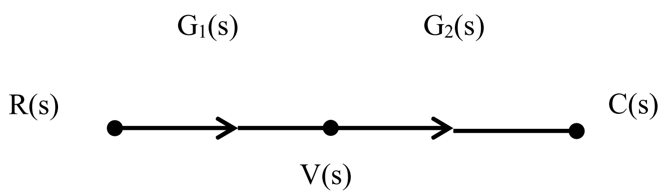
Hàm truyền đạt của một nhánh bằng tỷ số của giá trị nút ngọn và giá trị nút gốc:

$$W_{ij} = \frac{x_j}{x_i} \qquad (2.207)$$

Sự liên kết của các nhánh riêng lẻ tạo thành một Graph tín hiệu cho một hệ thống điều khiển.

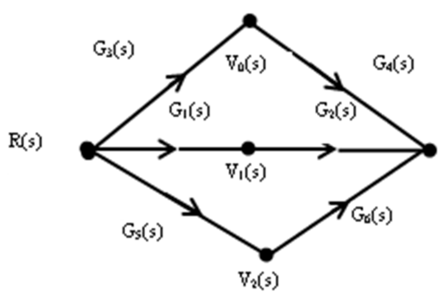
2.7.2 Các dạng biểu diễn Graph tín hiệu

- Dạng nối tiếp:



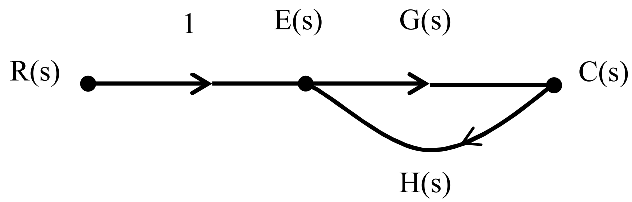
Hình 2.37: Graph biểu diễn hệ thống nối tiếp

- Dạng song song:



Hình 2.38: Graph biểu diễn hệ thống song song

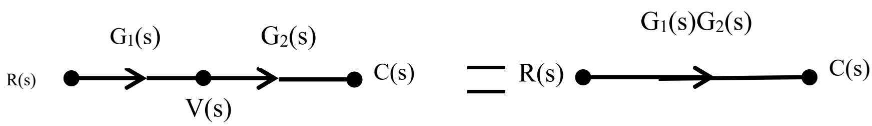
- Dạng phản hồi:



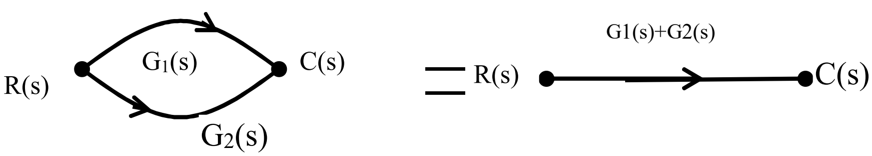
Hình 2.39: Graph biểu diễn hệ thống có phản hồi

2.7.3 Các quy tắc biến đổi Graph

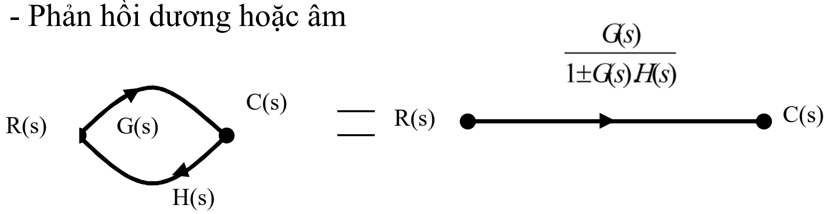
- Các nhánh nối tiếp:



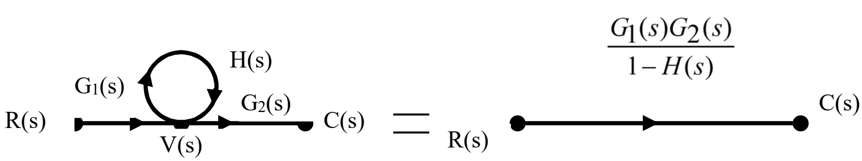
- Các nhánh song song



- Phản hồi dương hoặc âm



- Khử nhánh tạo vòng kín.



2.7.4 Quy tắc Masson

Hàm truyền đạt C(s)/R(s) trong một hệ thống được biểu diễn bằng Graph được tính theo công thức sau:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta} \tag{2.208}$$

trong đó:

- k là số đường dòng hướng từ đầu vào cho đến đầu ra. Đường dòng là một đường liên tục bao gồm các nhánh có cùng một hướng khi đì đầu vào cho đến đầu ra mà khi tín hiệu truyền đạt qua một nút của nó từ gốc đến ngọn chỉ được một lần.

- T_k là hàm truyền đạt của dòng thứ k hướng từ đầu vào đến đầu ra.

- Δ_k là định thức con của Graph suy ra từ Δ bằng cách bỏ đi các vòng kín. L_i có dính với đường dòng thứ k.

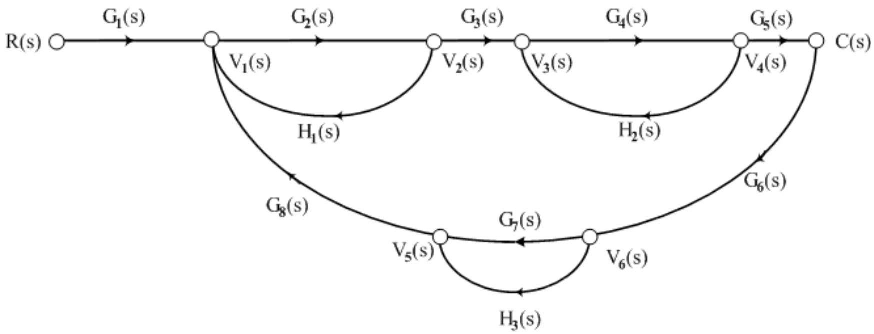
- $\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_J - \sum_{i,j,k} L_i L_J L_k + ...$

+ $\sum_i L_i$ là tổng số tất cả các hàm truyền đạt của các vòng kín có trong Graph. Vòng kín là một đường khép kín bao gồm các nhánh liên tiếp có cùng một hướng mà tín hiệu đi qua một nút của một nhánh nào nó chỉ được một lần.

+ $\sum_{i,j} L_i L_J$ là tổng số các tích hàm truyền đạt của hai vòng kín không dính vào nhau ở trong Graph.

+ $\sum_{i,j,k} L_i L_J L_k$ là tổng số các tích hàm truyền đạt của ba vòng kín không dính vào nhau ở trong Graph.

Ví dụ 2.25: Cho hệ thống điều khiển biểu diễn bằng sơ đồ Graph như sau



Hình 2.40: Sơ đồ minh hoạ quy tắc Masson

Bước 1: Xác định đường tiến trước

trong ví dụ này chỉ có một đường duy nhất là:

$P = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)$

Bước 2: Xác định hàm truyền của các vòng kín

$L_1 = G_2(s)H_1(s)$

$L_2 = G_4(s)H_2(s)$

$L_3 = G_7(s)H_4(s)$

$L_4 = G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)$

Bước 3: Xác định tích các hàm truyền của hai vòng kín không dính vào nhau

$L_1L_2 = G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)$

$L_1L_3 = G_2(s)H_1(s)G_7(s)H_4(s)$

$L_2L_3 = G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)$

Bước 4: Xác định tích các hàm truyền của ba vòng kín không dính vào nhau

$$L_1L_2L_3 = G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)$$

Bước 5: Tính Δ

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_iL_j - \sum_{i,j,k} L_iL_jL_k$$

$$= 1 - \left[G_2(s)H_1(s) + G_4(s)H_2(s) + G_7(s)H_4(s) + G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)\right] +$$
$$+ \left[G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s) + G_2(s)H_1(s)G_7(s)H_4(s) + G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)\right] -$$
$$- \left[G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)\right]$$

Bước 6: Xác định Δ_k

Ở đây chỉ có L_3 là không dính đến P

$$\Delta_1 = 1 - G_7(s)H_4(s)$$

Từ các công thức tính toán trên ta thay vào công thức tính G(s) ta được:

$$G(s) = \frac{T_k\Delta_k}{\Delta} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)\left[1 - G_7(s)H_4(s)\right]}{\Delta}$$

CHƯƠNG 3: ĐÁP ỨNG THỜI GIAN

3.1 Các đặc tính của hệ thống ĐKTĐ

3.1.1 Đặc tính thời gian

Một trong các đặc tính quan trọng của hệ thống tự động là đặc tính thời gian. Người ta thường sử dụng đặc tính thời gian để mô tả hệ thống tự động tuyến tính dừng và không dừng. *Đặc tính thời gian là phản ứng của hệ thống đối với tác động nào đó khi điều kiện ban đầu bằng 0*. Các tác động thường được sử dụng là tác động xung đơn vị $\delta(t)$ và tác động bậc thang đơn vị $u(t)$.Vì vậy người ta thường định nghĩa đặc tính thời gian là sự thay đổi của tín hiệu ra theo thời gian khi đầu vào tác động là các hàm chuẩn. Trong đặc tính thời gian người ta quan tâm đến hai đặc tính cơ bản: Đặc tính quá độ và đặc tính xung (Hàm trọng lượng).

3.1.2 Đặc tính xung (Hàm trọng lượng):

Phản ứng của hệ thống đối với tác động xung đơn vị khi điều kiện ban đầu bằng 0 được gọi là hàm quá độ xung g(t) (hàm trọng lượng). Hàm xung đơn vị $\delta(t-\tau)$ có dạng tương tự như $\delta(t)$, nhưng sai lệch theo thời gian một khoảng là τ. Tương tự, phản ứng của hệ thống tự động tuyến tính đối với tác động $a\delta(t-\tau)$ sẽ là $ag(t-\tau)$; với a là hằng số nào đó.

Tới trước thời điểm có tác động, giá trị của đặc tính quá độ xung bằng 0 nghĩa là:

$$g(t-\tau) = 0, \; t < \tau$$

Đẳng thức này được gọi là điều kiện vật lý thực tế.

Dùng khái niệm đặc tính quá độ xung, ta có thể tìm được phản ứng của hệ thống đối với tác động bất kỳ cho trước.

Giữa đặc tính quá độ xung và hàm số truyền của hệ thống có quan hệ với nhau. Ảnh hàm trọng lượng sẽ bằng:

$$Y(s) = \int x(\tau)e^{-st}dt\int_0^{\infty} g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt = X(s)\int_0^{\infty} g(v)e^{-sv}dv \qquad (3.1)$$

Mà $\qquad$ Y(s) = X(s).W(s) $\qquad$ (3.2)

So sánh (3.1) và (3.2) sẽ có:

$$W(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt \; (3.3)$$

Như vậy hàm số truyền đạt là biến đổi Laplace của hàm quá độ xung. Tất nhiên, hàm quá độ xung có thể nhận được theo hàm số truyền bằng cách biến đổi ngược Laplace:

$$g(t) = L^{-1}\{W(s)\} \qquad (3.4)$$

3.1.3 Hàm quá độ

Đặc tính quá độ h(t) là phản ứng của hệ thông đối với tác động bậc thang đơn vị khi điều kiện ban đầu bằng không.

Đối với hệ thống tự động dừng, đặc tính quá độ không phụ thuộc vào thời điểm bắt đầu tác động. Đặc tính h(t) có thể có dạng dao động hay biến đổi một cách đơn điệu. Hiện nay, để đánh giá chất lượng hệ thống tự động người ta thường sử dụng đặc tính quá độ h(t) bởi vì nó thể hiện được các chỉ tiêu chất lượng cơ bản của hệ thống.

Giữa đặc tính quá độ xung và đặc tính quá độ có liên hệ với nhau, thay x(t) = l(t) trong tích phân sau ta có:

$$h(t) = \int_0^{\infty} l(t)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} g(t-\tau)d\tau$$

(3.5)

Đổi biến t-τ = v và dτ = -dv, ta nhận được:

$$h(t) = -\int_{0}^{-\infty} g(v)dv = \int_{-\infty}^{t} g(v)dv = \int_{0}^{t} g(v)dv \tag{3.6}$$

Như vậy, đặc tính quá độ là tích phân của đặc tính quá độ xung. Lấy đạo hàm của cả hai vế của (3.6), ta sẽ nhận được:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \tag{3.7}$$

Vậy đặc tính quá độ xung là đạo hàm theo thời gian của đặc tính quá độ. Viết (3.7) dưới dạng toán tử, sẽ có:

$$W(s) = s.H(s) \tag{3.8}$$

Trong đó $\quad H(s) = L[h(t)]$ và $W(s)=L[g(t)]$ (3.9)

Từ (3.8) ta có mối liên hệ giữa ảnh hàm của đặc tính quá độ theo hàm truyền của hệ thống.

$$H(s) = \frac{1}{s}W(s) \tag{3.10}$$

Sử dụng biến đổi ngược Laplace, sẽ xác định được hàm quá độ theo hàm số truyền.

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}W(s)\right\} \tag{3.11}$$

3.1.4 Đặc tính tần số.

Các đặc tính tần số (ĐTTS) có ý nghĩa quan trọng trong mô tả hệ thống tự động dừng. Có thể nhận được các đặc tính này khi nghiên cứu chuyển động cưỡng bức của hệ thống dưới tác động của tín hiệu điều hoà.

Tính chất cơ bản của hệ thống tuyến tính là tính chất xếp chồng. Giả sử nhiễu loạn g(t) tác động lên hệ thống bằng không, ta có mối quan hệ giữa lượng ra y(t) với lượng vào x(t) được mô tả bằng phương trình vi phân sau:

$$a_0\frac{dy^n}{dt^n}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n=b_0\frac{dx^m}{dt^m}+\cdots+b_{m-1}\frac{dx}{dt}+b_m x \qquad 12)$$

Các ĐTTS xác định mối liên hệ giữa phổ lượng vào X(jω) và phổ lượng raY(jω). Các phổ này chính là biến đổi Fourier của các hàm thời gian tương ứng:

$$\left.\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^\infty x(t)e^{-j\omega t}dt = F\{x(t)\} \\ Y(j\omega) &= \int_0^\infty y(t)e^{-j\omega t}dt = F\{y(t)\} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.13)}$$

ở đây: F - ký hiệu biến đổi Fourier.

ω - biến thực, là tần số của tín hiệu điều hoà.

Lấy biến đổi Fourier phương trình (3.13) với điều kiện ban đầu bằng 0, sẽ nhận được phương trình biểu diễn quan hệ giữa phổ lượng ra với phổ lượng vào của hệ thống tự động:

$$a_0(j\omega)^n Y(j\omega)+a_1(j\omega)^{n-1}Y(j\omega)+\cdots+a_nY(j\omega)=b_0(j\omega)^m X(j\omega)+\cdots+b_mX(j\omega) \qquad (3.14)$$

sau khi biến đổi, sẽ nhận được:

$$Y(j\omega)=X(j\omega)\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_n}=X(j\omega)W(j\omega) \qquad (3.15)$$

Tỷ số của các đa thức:

$$W(j\omega)=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{E(j\omega)}{D(j\omega)}$$

(3.16)

được gọi là hàm số truyền tần số của hệ tự động.

Từ đây, ta thấy có thể nhận được biểu thức hàm truyền tần số từ hàm số truyền bằng cách thay biến s bằng phức jω.

Hàm số truyền truyền tần số W(jω) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \tag{3.17}$$

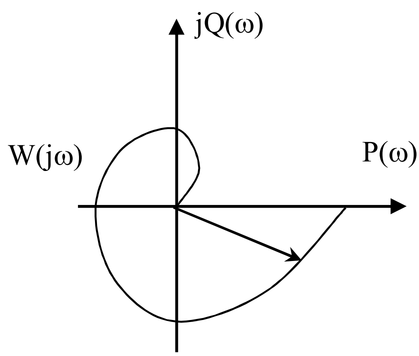
Ở đây

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= arctgW(j\omega) \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Nếu $\quad \left|arctgW(j\omega)\right| \le \dfrac{\pi}{2}$

Thì $\quad \varphi(\omega) = arctg\dfrac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ (3.19)

Trên mặt phẳng phức (Hình 3.1) ứng với tần số nào đó thì hàm số truyền tần số sẽ xác định véc tơ. Độ dài véc tơ bằng A(ω), còn argument (góc hợp thành bởi véc tơ này với bản trục thực dương) là φ(ω). Đường cong được vẽ bởi đầu mút của véc tơ này, khi tần số biến thiên từ 0 đến ∞ (đôi khi từ -∞ đến ∞) gọi là đặc tính tần số (ĐTTS) biên độ pha của hệ thống tự động.



Hình 3.1: Đặc tính tần số biên độ pha

Hàm truyền tần số được gọi là *hàm tần số biên độ pha*. Phần thực của nó P(ω) =ReW(jω) và phần ảo Q(ω) = ImW(jω) được gọi tương ứng là hàm tần số phần thực và hàm tần số phần ảo. Đồ thị của hàm tần số phần thực P(ω) gọi là ĐTTS phần thực. Còn đồ thị của hàm tần số phần ảo - ĐTTS phần ảo Q(ω).

Môđun A(ω) = |W(jω)| gọi là hàm tần số biên độ. Đồ thị của nó gọi là ĐTTS biên độ. Còn φ(ω) là argument của W(jω) được gọi là hàm tần số pha. Đồ thị của nó gọi là ĐTTS pha.

Ngoài các ĐTTS nói trên, còn thường sử dụng các ĐTTS biên độ logarit L(ω) và ĐTTS pha logarit φ(ω). Gọi:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| \tag{3.20}$$

là hàm tần số biên độ logarit. Đồ thị diễn tả sự phụ thuộc giữa hàm tần số biên độ logarit L(ω) với hàm logarit tần số lg(ω), gọi là ĐTTS biên độ logarit hay còn gọi là đồ thị Bode.

Khi xây dựng ĐTTS biên độ logarit, trên trục hoành ta đặt các tần số theo tỷ lệ logarit, ở các điểm chia tương ứng với giá trị lg(ω), nhưng lại ghi giá trị của ω để tiện cho việc đọc tần số, chứ không ghi giá trị lg(ω). Còn trục tung là L(ω). ĐTTS pha logarit là đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc giữa hàm tần số pha φ(ω) với logarit lg(ω). Trục hoành của ĐTTS pha logarit giống trục hoành của ĐTTS biên độ logarit.

Đơn vị của L(ω) tính theo (3.20) là đềxibel [db]. Đơn vị cơ sở của trục hoành trong ĐTTS biên độ logarit la đềcác [dc] hay octavơ [oc]. Đềcác là độ rộng khoảng tần số mà trên đó tần số thay đổi 10 lần. Tương tự, octavơ là khoảng mà trên đó tần số thay đổi 2 lần.

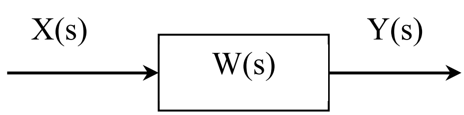
Khi xây dựng ĐTTS logarit thì cần lưu ý là trục tung và trục hoành không cắt nhau tại tần số ω = 0. Hai trục sẽ cắt nhau tại một tần số thích hợp nào đó, bởi vì khi ω → 0 thì lg(ω) → - ∞: nghĩa là ω = 0 thì sẽ tương ứng với điểm xa vô cùng. Trên thực tế, người ta thường sử dụng ĐTTS biên độ logarit tiệm cận. Độ nghiêng của đặc tính tiệm cận thường dùng là db/dc hay db/oc. Khi tác động lên đầu vào hệ thống tự động là một tín hiệu điều hoà thì lượng ra của hệ thống cũng thay đổi theo quy luật điều hoà, nhưng biên độ và pha của lượng ra và lượng vào sẽ khác nhau. Nói chung, biên độ và pha lượng ra sẽ phụ thuộc vào tần số của lượng vào. Người ta gọi tỷ số giữa biên độ lượng ra với biên độ lượng vào là mô đun, còn góc lệch pha giữa lượng ra với lượng vào là argument của hàm số truyền tần số. Vì thế, *đặc tính tần số biên độ diễn tả sự thay đổi của tỷ số các biên độ lượng ra với lượng vào, còn ĐTTS pha diễn tả góc lệch pha giữa lượng ra với lượng vào*. Đó là ý nghĩa vật lý đối ĐTTS.

3.2 Các khâu động học điển hình

3.2.1 Định nghĩa các khâu động học điển hình

Các khâu động học mà phương trình vi phân mô tả quá trình động học của chúng có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2, được gọi là khâu động học điển hình.

Đặc điểm của các khâu động học điển hình là chỉ có một đầu vào và một đầu ra, tín hiệu đầu ra không ảnh hướng đến tín hiệu đầu vào.



Hình 3.2 Biểu diễn khâu động học điển hình.

Các khâu động học điển hình bao gồm: Khâu nguyên hàm, khâu tích phân, khâu vi phân, khâu trễ. Khâu nguyên hàm gồm các khâu: Khâu khuếch đại (khâu không quán tính), khâu quán tính bậc một, khâu quán tính bậc hai (Khâu dao động). Sau đây ta khảo sát các khâu động học điển hình trên.

3.2.2.Các khâu nguyên hàm.

a)*Khâu khuếch đại*

- Khâu không quán tính là khâu mà phương trình động học có dạng:

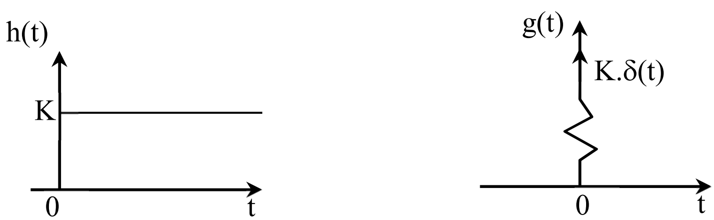
$y = K.x$ $(K>0)$

- Hàm truyền đạt của khâu $W(s) = K$

- Các đặc tính thời gian.

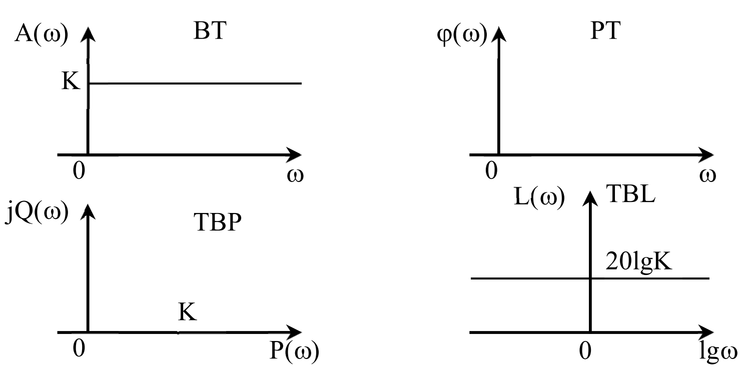
Hàm quá độ :h(t) = K.1(t).

Hàm trọng lượng : $g(t) = K.\delta(t)$.



Hình 3.3. Đặc tính thời gian của khâu không quán tính

Các đặc tính tần số.



Hình 3.4: Đặc tính tần số của khâu không quán tính

Hàm truyền tần số : W(jω) = K.

Đặc tính BT : A(ω) = K.

Đặc tính PT : φ(ω) = 0.

Đặc tính BTL : L(ω) = 20.lgK

b) *Khâu quán tính bậc nhất:*

- Phương trình vi phân:

$$T\frac{dy}{dt} + y = K.x \tag{3.21}$$

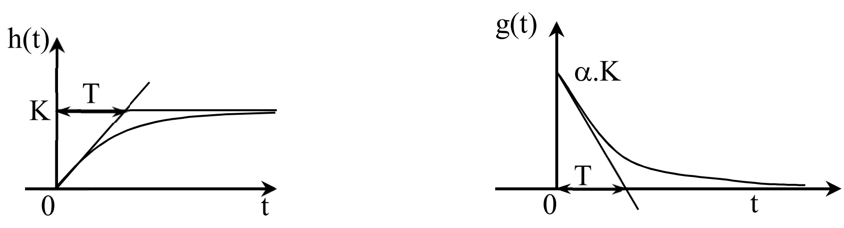
trong đó: K là hệ số truyền của khâu.

T là hằng số thời gian của khâu.

- Hàm truyền đạt : W(s) = K/ (Ts+1)
- Các đặc tính thời gian :

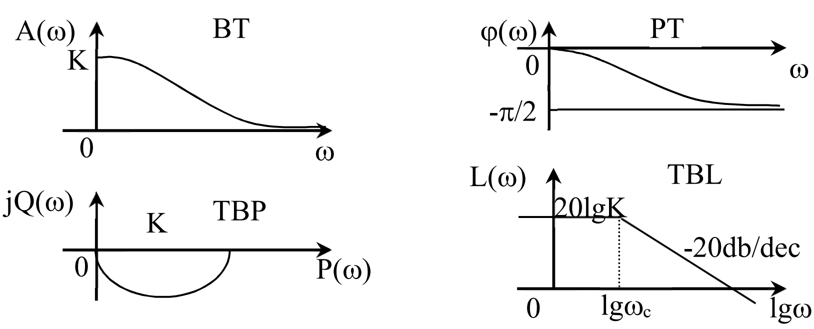
  Hàm quá độ : $h(t) = K(1-e^{-t/T}).1(t)$

  Hàm trọng lượng : $g(t) = dh(t)/dt = K.e^{-t/T}.1(t)/T$



Hình 3.5: Đặc tính thời gian của khâu quán tính bậc nhất

- Các đặc tính tần số:



Hình 3.6: Đặc tính tần số của khâu quán tính bậc nhất

ĐTTS biên độ pha : $W(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega) = K/ (Tj\omega + 1)$

ĐTTS biên độ : $A(\omega) = [\ P^2 (\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2} = k/ (T^2\omega^2 + 1)^{1/2}$

ĐTTS pha $\varphi (\omega) = \text{arctg}T\omega$

ĐTTS biên độ logarit (ĐTBL $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$)

c) *Khâu quán tính bậc hai:*

- Phương trình:

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy}{dt} + y = Kx \qquad (3.22)$$

Trong đó: *T là hằng số thời gian.*

K là hệ số khuếch đại.

ξ là hệ số tắt dần tương đối ($\xi \geq 0$).

- Hàm truyền đạt: $W(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$

- Các đặc tính thời gian:

Trường hợp thứ nhất: $0 < \xi < 1$.

Hàm quá độ: $h(t) = K[1 - e^{-\alpha t}(\cos\beta t - \dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta t)]$

Hàm trọng lượng: $g(t) = h'(t) = \dfrac{Ke^{-\alpha t}}{T\beta}.\sin\beta t$

Trong đó: $\alpha = \dfrac{\xi}{T}$ và $\beta = \dfrac{\sqrt{1-\xi}}{T}$

Trường hợp này, đặc tính quá độ có dạng dao động tắt dần và được gọi là khâu dao động.

Trường hợp thứ hai: $\xi = 0$.

Hàm quá độ: $h(t) = K(1 - \cos\omega_1 t)$

Hàm trọng lượng: $g(t) = K\omega_1 \sin\omega_1 t$

Với $\omega_1 = 1/T$: Tần số riêng dao động. Đặc tính quá độ dao động điều hoà và được gọi là khâu dao động điều hoà.

Trường hợp thứ ba : $\xi \geq 1$.

Hàm quá độ :

Khi $\xi = 1$ với α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

$$h(t) = K(1 - (1 - \alpha t)e^{-\alpha t})$$

Khi $\xi > 1$ với α_1, α_2 là hai nghiệm thực của phương trình đặc trưng.

$$h(t) = K\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_2 t}\right)$$

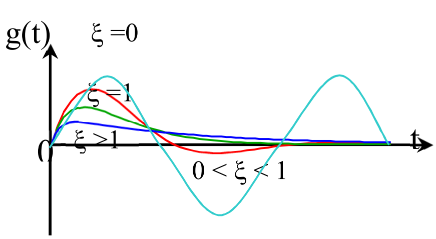
Hàm trọng lượng:

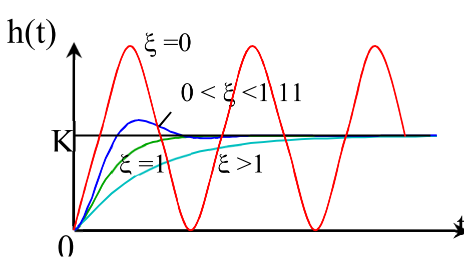
Khi $\xi = 1$ với α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

$$k(t) = K\alpha^2 t e^{-\alpha t}$$

Khi $\xi > 1$ với α_1, α_2 là hai nghiệm thực của phương trình đặc trưng.

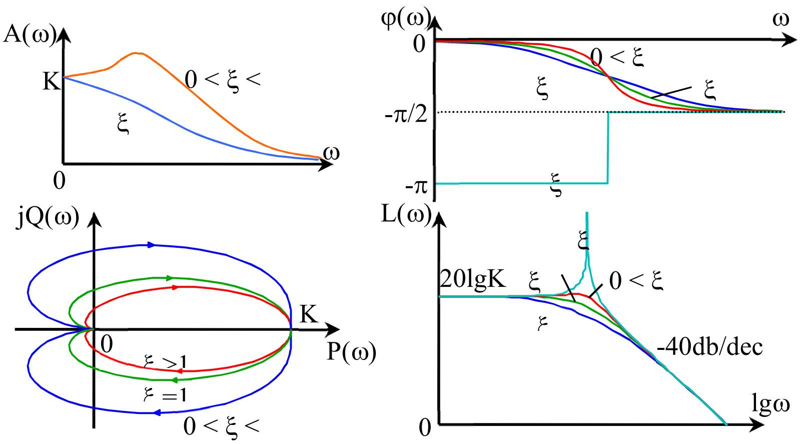
$$k(t) = K\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})$$





Hình 3.7: Đặc tính thời gian của khâu bậc hai

Các đặc tính tần số:



Hình 3.8: Đặc tính tần số của khâu bậc hai

ĐTTS biên độ pha : W(jω) = Y(jω)/X(jω) =K/(1-$T^2\omega^2$ +j2ξTω)

ĐTTS biên độ : $A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \dfrac{K}{\sqrt{\left[(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2\right]}}$

ĐTTS pha φ (ω) = -arctg [2ξTω/(1-$T^2\omega^2$)].

ĐTTS biên độ logarit (ĐTBL L(ω) = 20lg A(ω).

3.2.3 Khâu tích phân.

Phương trình vi phân của khâu tích phân.

$$y = K\int xdt \text{ hoặc } \frac{dy}{dt} = Kx = \frac{x}{T} \qquad (3.23)$$

Trong đó T = 1/K được gọi là hằng số thời gian tích phân.

- Hàm truyền đạt của khâu.

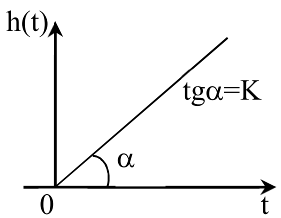
Biến đổi phương trình vi phân sang toán tử Laplace ta có :

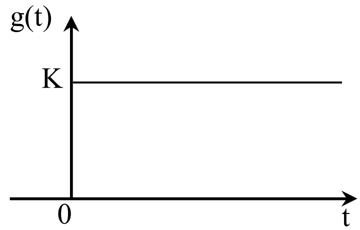
$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ts}$$

- Các đặc tính thời gian.

Hàm quá độ *: h(t) = Kt.*

Hàm trọng lượng: k(t) = h'(t) = K.





Hình 3.9: Đặc tính thời gian của khâu tích phân

Các đặc tính tần số.

Hàm truyền tần số : $W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega} = -j\frac{1}{T\omega} = j\frac{K}{\omega}$

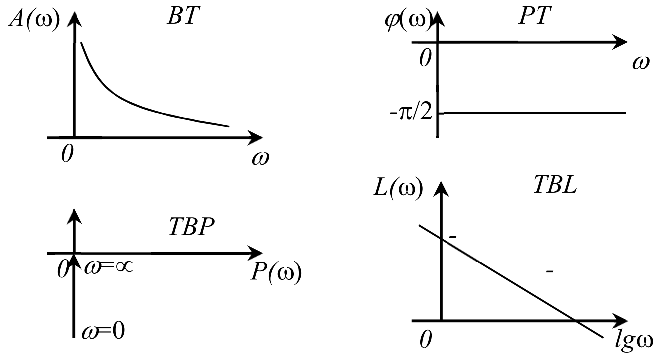
Như vậy hàm truyền tần số của khâu tích phân chỉ có phần ảo âm khi ω *thay đổi từ 0 đến* $\propto$ *mà không có phần thực.*

Đặc tính biên độ tần số: $A(\omega) = \frac{1}{T\omega}$

Đặc tính pha tần số : $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Đặc tính BTL (biên độ tần số lô ga rít) : L(ω) = lgA(ω) = -20lgT - 20lgω *(thêm cơ số 10, trục hoành có đơn vị là thập phân - decade)*

Đây là phương trình của một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng - 20lgT (hoành độ tương ứng) và có độ nghiêng bằng - 20db/dec.



Hình 3.10: Đặc tính tần số của khâu tích phân

3.2.4.Khâu vi phân.

- Phương trình khâu vi phân: y(t) = Kdx(t)/dt.
- Phương trình khâu vi phân bậc một: y(t) = KTdx(t)/dt + Kx(t).
- Hàm truyền đạt:

Khâu vi phân lý tưởng: G(s) = Ks

Khâu tỉ lệ vi phân: G(s) = C(s)/R(s) =K(Ts + 1)

- Các đặc tính thời gian:

Khâu vi phân lý tưởng:

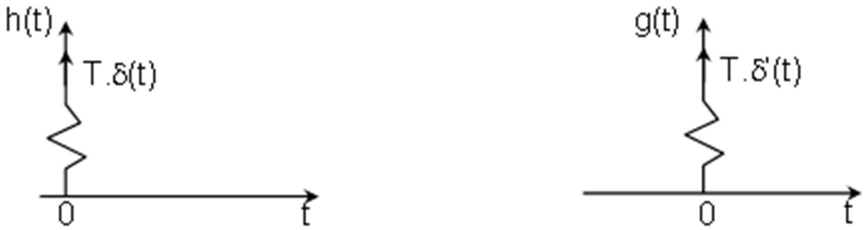
Hàm quá độ: h(t) =Kδ(t)

Hàm trọng lượng: g(t) = dh(t) /dt = Kdδ(t)/dt

Khâu vi phân bậc một:

Hàm quá độ: h(t) =K.1(t) + KTδ(t)

Hàm trọng lượng: g(t) = dh(t) /dt = Kdδ(t)/dt + Kδ(t)



Hình 3.11: Đặc tính thời gian của khâu vi phân lý tưởng

- Các đặc tính tần số:

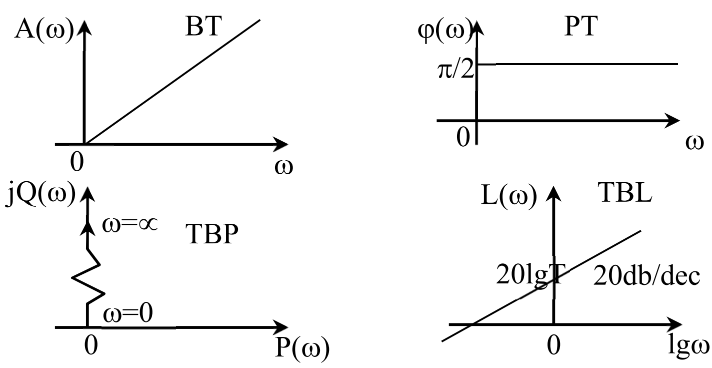
Khâu vi phân lý tưởng:

ĐTTS biên độ pha: $G(j\omega) = C(j\omega)/R(j\omega) = -j\,\omega K$

ĐTTS biên độ: $A(\omega) = [\,P^2(\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2} = K\omega$

ĐTTS pha: $\varphi(\omega) = \pi/2$

ĐTTS biên độ logarit (ĐTBL): $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K\omega$



Hình 3.12: Đặc tính tần số của khâu vi phân lý tưởng

Khâu vi phân bậc một :

ĐTTS biên độ pha : $G(j\omega) = C(j\omega)/R(j\omega) = -j\,\omega KT + K$

ĐTTS biên độ : $A(\omega) = [\,P^2(\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2} = K(1 + \omega^2T^2)^{1/2}$

ĐTTS pha : $\varphi(\omega) = \text{arctg}\, T\omega$

ĐTTS biên độ logarit (ĐTBL) $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K\omega$

3.2.5 Khâu trễ

Khâu chậm sau là khâu động học mà sau một khoảng thời gian xác định thì lượng ra lặp lại lượng vào và tín hiệu không bị méo.

Phương trình động học của khâu trễ có dạng :

$$y(t) = x(t-\tau)$$

Các phần tử thuộc khâu trễ như băng tải, đường ống dẫn nhiệt, đường ống dẫn chất lỏng …

- Hàm truyền đạt của khâu trễ:

$$W(s) = Y(s)/X(s) = e^{-s\tau}$$

- Đặc tính thời gian:

Hàm quá độ: $h(t) = 1(t-\tau)$

Hàm trọng lượng: $g(t) = dh(t)/dt = \delta(t-\tau)$

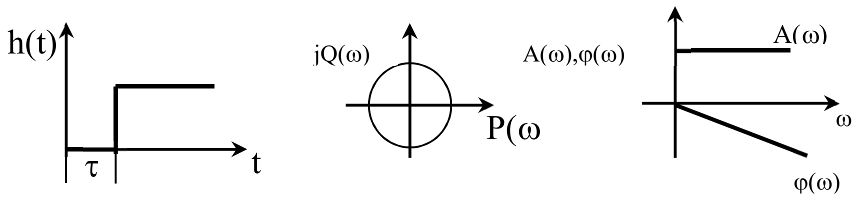
- Các đặc tính tần số:

ĐTTS biên độ pha : $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

ĐTTS biên độ : $A(\omega) = 1$

ĐTTS pha : $\varphi(\omega) = -\omega\tau$

ĐTTS biên độ lôgarit : $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 0$



Hình 3.13. Đặc tính quá độ và các đặc tính tần số của khâu trễ

3.3. Mô hình ZPK (Zero, Pole and Gain)

Ta xét hàm truyền sau:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n}$$

$$= K \frac{(s - z_1)(s - z_2)(\ldots)(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)(\ldots)(s - p_n)} \qquad (3.24)$$

$n \geq m$

Đặt : $$\begin{aligned} A(s) &= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n \\ B(s) &= b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_m \end{aligned} \qquad (3.25)$$

A(s) là mẫu số của hàm truyền, B(s) là tử số của hàm truyền.

- Điểm không (Zeros) là là các giá trị làm cho hàm truyền G(s) bằng 0 hay là nghiệm của phương trình B(s) = 0. Các điểm không được kí hiệu là z_i (i: 1÷m).
- Điểm cực (Poles) là các giá trị làm cho hàm truyền không xác định hay là nghiệm của phương trình A(s) = 0. Các điểm cực được kí hiệu là p_i (i: 1÷m).
- Hệ số khuếch đại tĩnh (Gain) kí hiệu là K.

Ví dụ 3.1: Tìm các điểm cực, điểm không và hệ số khuếch đại của hệ thống của hàm truyền sau:

$$G(s) = \frac{5(s+1)(s+2)}{(s+5)(s+3)} \tag{3.26}$$

Hệ số khuếch đại K = 5.

- Điểm cực: A(s) = (s+5)(s+3) = 0 suy ra p_1 = -5 và p_2 = -3
- Điểm không: B(s) = (s+1)(s+2) = 0 suy ra z_1 =-1 và z_2 = -2

Ví dụ 3.2:

Ta có hàm truyền sau

$$C(s) = \frac{s+2}{s(s+5)} \tag{3.27}$$

Phân tích thành tổng các phân số bậc nhất

$$\frac{s+2}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} \tag{3.28}$$

Quy đồng mẫu số và đồng nhất hai vế ta có

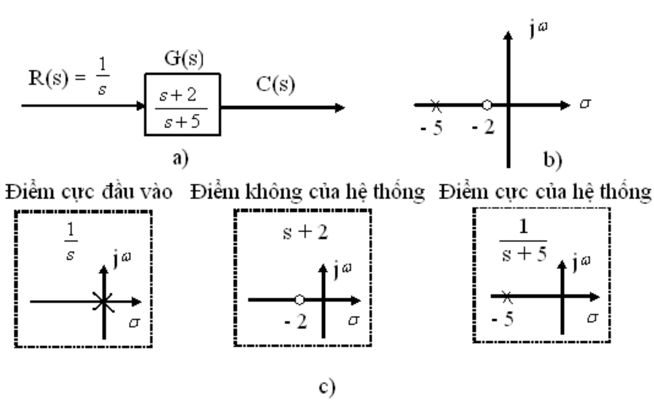
$$(A+B)s + 5A = s + 2 \tag{3.29}$$

Giải hệ phương trình:

A + B = 1   5A = 2

Suy ra: A = 2/5, B = 3/5

$$C(s) = \frac{s+2}{s(s+5)} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5} \tag{3.30}$$



Hình 3.14 : Sơ đồ bố trí các điểm cực và điểm không

Đáp ứng đầu ra:

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t} \tag{3.31}$$

trong đó: $\frac{2}{5}$ là thành phần cưỡng bức

$\frac{3}{5}e^{-5t}$ là thành phần tự do.

Một số kết luận:

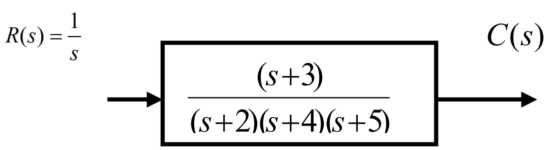
1. Điểm cực của hàm truyền đầu vào của hệ thống quyết định dạng của đáp ứng cưỡng bức.

2. Điểm cực của hàm truyền hệ thống quyết định dạng của đáp ứng tự do.

3. Đáp ứng đầu ra có dạng hàm mũ $e^{-\alpha t}$ nếu có điểm cực nằm trên trục thực.

4. Điểm cực và điểm không quyết định biên độ của cả đáp ứng cưỡng bức và đáp ứng tự do.

Ví dụ 3.3: Cho hệ thống có hàm truyền như sau:



Hình 3.15: Hệ thống đối tượng làm ví dụ 3

Tìm hàm đáp ứng đầu ra c(t) bao gồm hai thành phần đáp ứng tự do và đáp ứng cưỡng bức.

<u>Giải:</u>

- Kiểm tra xem các điểm cực của hệ thống tạo ra thành phần đáp ứng tự do tuân theo quy luật hàm mũ.

- Điểm cực đầu vào tạo ra thành phần đáp ứng cưỡng bức.

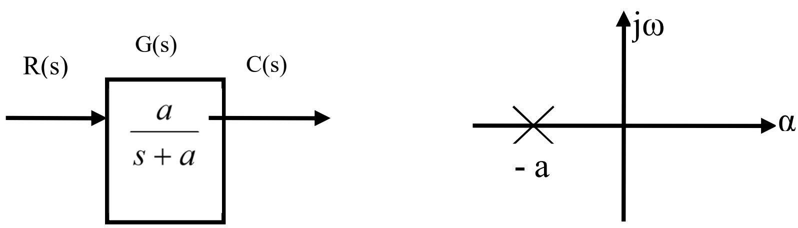
$$\text{Ta có: } C(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s}}_{\text{Đáp ứng}} + \underbrace{\frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} + \frac{K_4}{s+5}}_{\text{Đáp ứng}} \qquad (3.32)$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược ta được:

$$c(t) = K_1 + \underbrace{K_2e^{-2t}}_{\text{Đáp ứng}} + \underbrace{K_3e^{-4t} + K_4e^{-5t}}_{\text{Đáp ứng}} \qquad (3.33)$$

3.4 Hệ thống bậc nhất

Hệ thống bậc 1 không có điểm không được biểu diễn như sau:



a) b)

Hình 3.16: Hệ tthống bậc nhất và phân bố điểm cực

Nếu tín hiệu đầu vào là bậc thang đơn vị *R(s) = 1/s* thì đáp ứng đầu ra C(s) là:

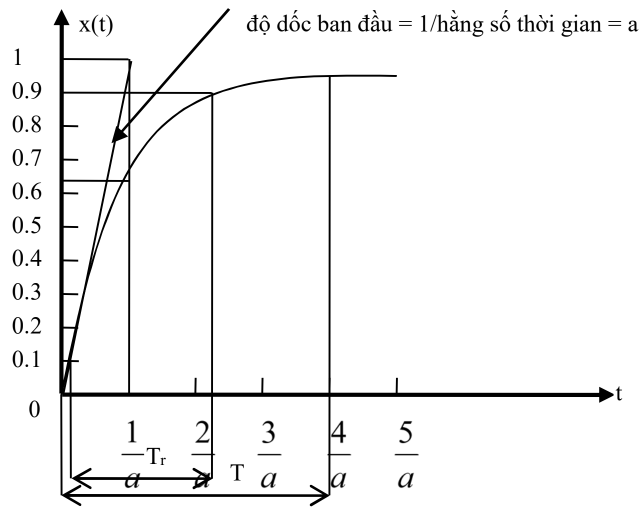
$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)} \qquad (3.34)$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược ta có đáp ứng đầu ra biểu diễn trên miền thời gian là

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at} \qquad (3.35)$$

- Điểm cực đầu vào tại thời điểm ban đầu tạo ra đáp ứng cưỡng bức $c_f(t) = 1$

- Điểm cực hệ thống tại – a tạo ra đáp ứng tự do $c_n(t) = - e^{-at}$.



Hình 3.17: Đáp ứng đầu ra của hệ thống bậc 1 với tín hiệu bậc thang đơn vị

tại thời điểm t = 1/a ta có

$$e^{-at}\Big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0.37$$
$$x(t)\Big|_{t=1/a} = 1 - e^{-at}\Big|_{t=1/a} = 1 - 0.37 = 0.63 \qquad (3.37)$$

Từ việc khảo sát đặc tính của đối tượng bậc ta có các khái niệm sau:

- Hằng số thời gian (constant time): gọi 1/a là hằng số thời gian của đáp ứng. Hằng số thời gian có thể được hiểu như là khoảng thời gian mà e^{-at} giảm 37% giá trị ban đầu hay là khoảng thời gian đáp ứng tín hiệu bậc thang đơn vị tăng tới 63% giá trị xác lập.

Nghịch đảo của hằng số thời gian gọi là tần số (1/s). Vì vậy ta có thể gọi hằng số a là tần số hàm mũ. Hằng số thời gian được xem như là đặc tính đáp ứng thời gian của hệ thống bậc 1 vì vậy nó có quan hệ với tốc độ của hệ thống tương ứng vời tín hiệu bậc thang đơn vị ở đầu vào.

- Thời gian tăng T_r (rise time): thời gian tăng được định nghĩa là thời gian mà đường đặc tính mấp mô đi từ 0.1 đến 0.9 giá trị xác lập.

Thời gian tăng được tính bằng sự sai lệch giữa hai thời điểm c(t) = 0.9 và c(t) = 0.1.

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a} \tag{3.38}$$

- Thời gian xác lập hay thời gian ổn định T_s (settling time): thời gian xác lập là khoảng thời gian mà đáp ứng đạt đến và sai số trong khoảng 2%. Với c(t) = 0.98 thay vào công thức và rút ra được

$$T_s = \frac{4}{a} \tag{3.39}$$

Hàm truyền của hệ thống bậc 1 qua thực nghiệm:

Trên thực tế không dễ dàng tìm được hàm truyền của hệ thống bởi vì các thiết bị trong hệ thống khó có thể xác định được. Vì vậy hàm truyền của hệ thống có thể xác định được bằng cách xác định quan hệ giữa đầu vào và đầu ra thông qua phân tích đường đặc tính của đối tượng khi cho đáp ứng đầu vào là tín hiệu bậc thang đơn vị. Hàm truyền có thể xác định ngay cả khi ta không biết được cấu trúc bên trong của đối tượng.

Với tín hiệu vào là hàm bậc thang đơn vị ta có thể tính được hàng số thời gian và các giá trị xác lập.

Xét ví dụ sau:

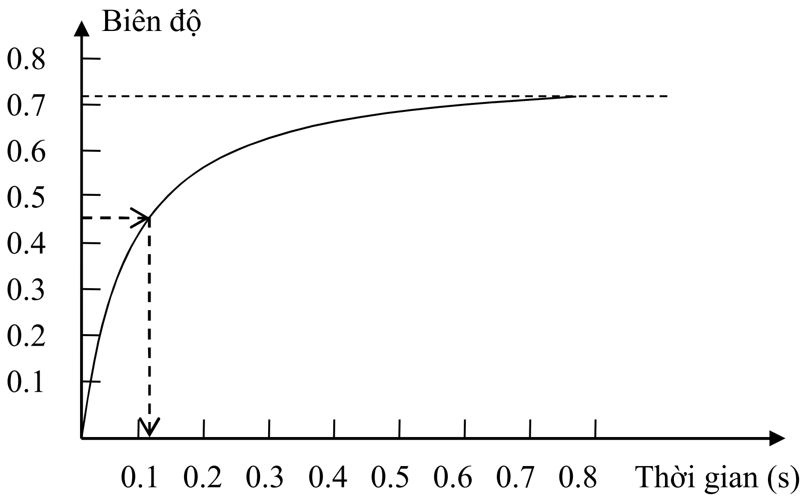
$$G(s) = \frac{K}{s+a} \tag{3.40}$$

Các đáp ứng đầu ra:

$$C(s)=\frac{K}{s(s+a)}=\frac{K/a}{s}+\frac{K/a}{s+a} \tag{3.41}$$

Nếu ta xác định được hệ số khuếch đại K và a từ phòng thí nghiệm thì ta sẽ xác định được hàm truyền của đối tượng.

Giả sử ta có đáp ứng sau:



Hình 3.18 : Đường đặc tính đáp ứng của hệ thống bậc nhất

Đáp ứng của hệ thống bậc nhất không có độ quá điều chỉnh và độ sai lệch điểm không. Từ đường đáp ứng ta xác định hằng số thời gian

- Giá trị xác lập là giá trị mà đường đáp ứng đạt đến bằng 0.72.

- Hằng số thời gian là thời gian mà độ lớn bằng 63% giá trị xác lập và bằng 0.63 x 0.72 = 0.45 hay bằng 0.13 (s) suy ra a = 1/0.13 = 7.7

- Đáp ứng cưỡng bức đạt đến giá trị xác lập K/a = 0.72 suy ra K = 5.54

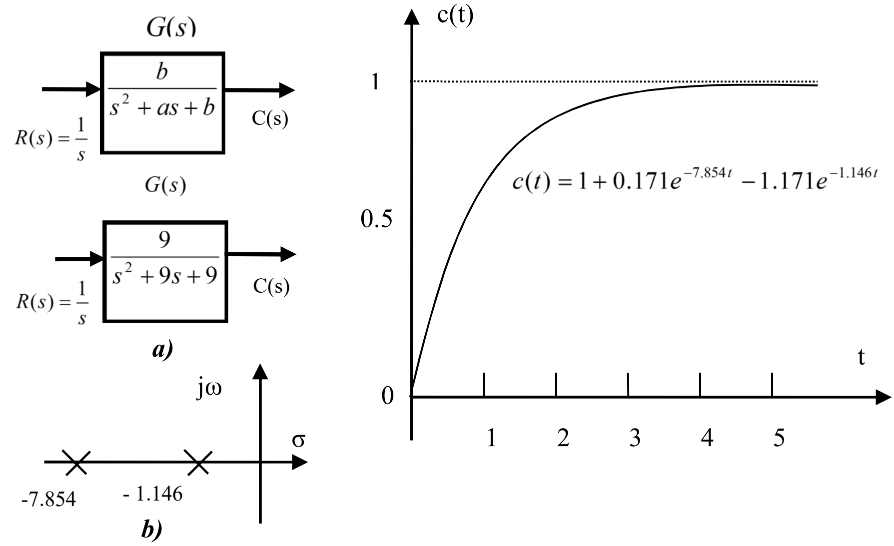
- Lúc đó ta có hàm truyền của hệ thống là

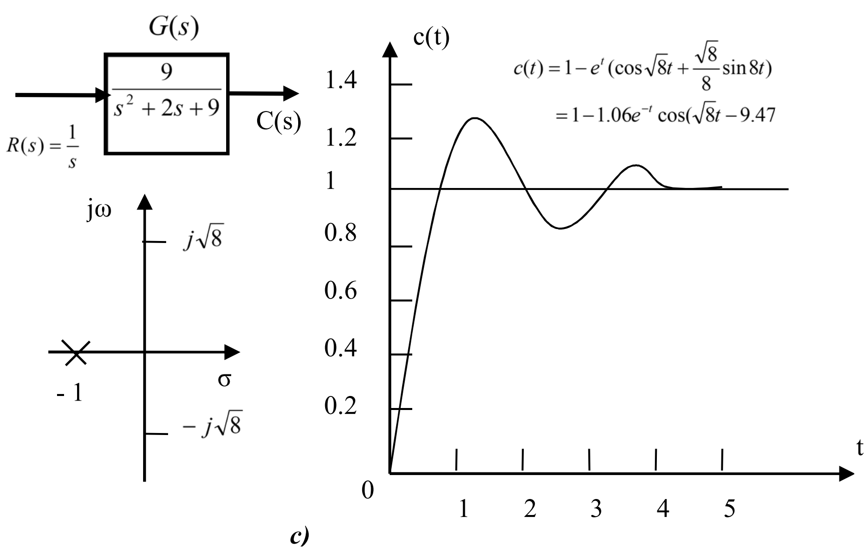
$$G(s)=\frac{5.54}{s+7.7} \tag{3.42}$$

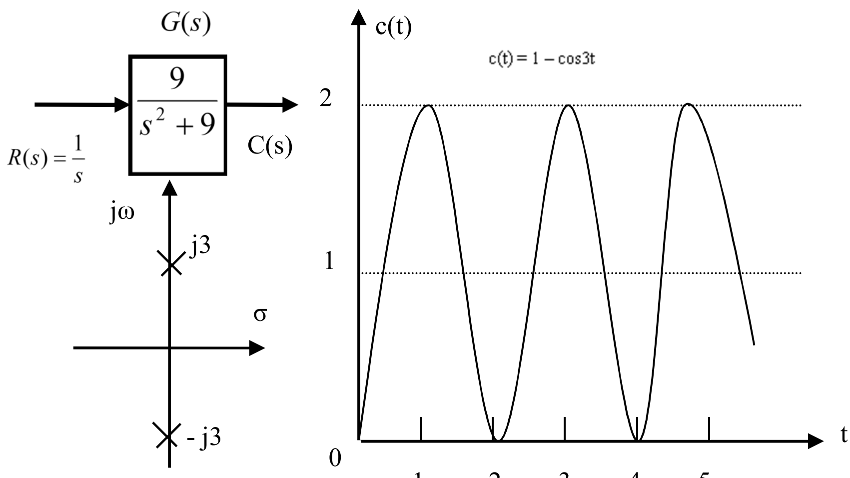
Hàm truyền này cũng rất gần với hàm truyền của đáp ứng trên

$$G(s) = \frac{5}{s+7} \tag{3.43}$$

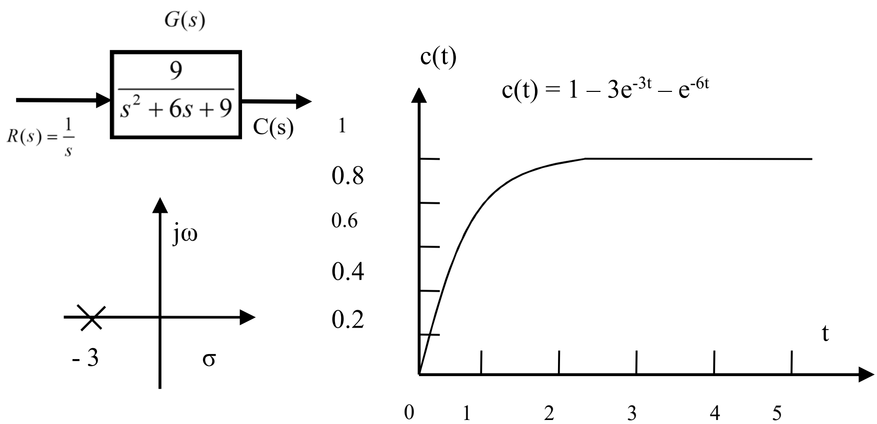
3.5. Hệ thống bậc 2







d)



e)

Hình 3.19 : Các hệ thống bậc hai và đáp ứng

với tín hiệu bậc thang đơn vị

Ta có hàm truyền tổng quát của hệ thống bậc hai :

$$G(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \tag{3.44}$$

trong đó: K là hệ số khuếch đại.

T là hằng số thời gian.

ξ là độ suy giảm.

3.5.1 Hệ thống đáp ứng xung tắt dần (Overdamped)

Đây là đáp ứng không có dao động trong khoảng giá trị ổn định nhưng để đạt tới dao động giới hạn tắt dần lâu hơn.

Khi khâu quán tính bậc hai có hai điểm cực thực thì bao gồm 2 khâu quán tính bậc một nối tiếp nhau. Với điều kiện $\xi > 1$, ta có

$$G(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1} x \frac{K_2}{T_2 s + 1} \tag{3.45}$$

Hai điểm cực là: $p_1 = -1/T_1$ và $p_2 = -1/T_2$

Xét đáp ứng đầu ra sau:

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9s + 9)} = \frac{9}{s(s + 7.854)(s + 1.1.46)} \tag{3.46}$$

- Đáp ứng đầu ra có một điểm cực tại gốc toạ độ (do có đáp ứng tín hiệu bậc thang đơn vị).

- Hai điểm cực thực của hệ thống.

- Điểm cực đầu vào sẽ tạo ra thành phần đáp ứng cưỡng ức. Mỗi điểm cực của hệ thống sẽ tạo ra đáp ứng tự do có dạng hàm mũ trong đó tần số hàm mũ chính bằng vị trí các điểm cực.

Đáp ứng đầu ra sẽ có dạng:

$$c(t) = K_1 + K_2 e^{-7.854t} + K_3 e^{-1.146t} \tag{3.47}$$

Đường đặc tính của hệ thống bậc hai tắt dần thể hiện ở hình 3.19b

3.5.2 Hệ thống đáp ứng dưới tắt dần (Underdamped)

Đây là đáp ứng có dao động trong khoảng đường bao suy giảm. Hệ thống càng có nhiều đường bao thì đáp ứng đạt tới trạng thái ổn định càng lâu.(Xem hình 3.19c)

Ta xét phương trình đặc tính:

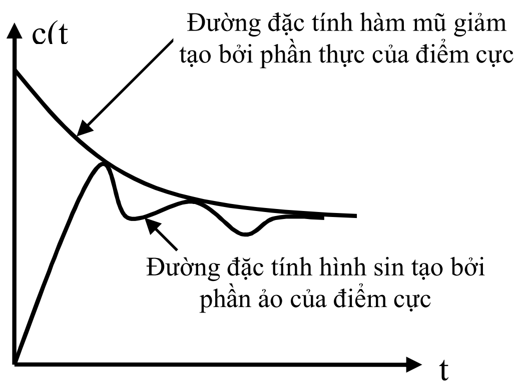
$$T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1 = 0 \quad (3.48)$$

Khi ξ < 1 thì phương trình (3.48) sẽ có hai nghiệm phức liên hợp hai nghiệm này là hai điểm cực của hàm truyền.

$$\begin{cases} p_1 = -\dfrac{\xi}{T} + j\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = -\sigma + j\omega_1 \\ p_2 = -\dfrac{\xi}{T} - j\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = -\sigma - j\omega_2 \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\alpha = \frac{\xi}{T}; \omega_{1,2} = \pm j\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$$

Quá trình qúa độ xảy ra trong khâu bậc hai là quá trình dao động $\omega_{1,2} = \pm j\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ là khâu dao động bậc 2. Đáp ứng thời gian bao gồm biên độ hàm mũ giảm tạo bởi phần thực của điểm cực hệ thống và dạng sóng hình sin tạo bởi phàn ảo của điểm cực hệ thống.



Hình 3.20: Đáp ứng bậc hai tạo bởi các nghiệm phức

Hằng số thời gian của hàm mũ bằng phần thực của điểm cực hệ thống. Giá trị của phần ảo là tần số thực của dao động hình sin. Tần số dao đông hình sin được gọi là tần số suy giảm của dao động w_d. đáp ứng ồn định được quyết định bởi điểm cực đầu vào đặt ở gốc toạ độ. Chúng ta gọi đáp ứng này là đáp ứng dưới tắt dần mà tiến tới giá trị ổn định qua đáp ứng thời gian gọi là dao động suy giảm.

3.5.3 Hệ thống đáp ứng không bị nhụt (Undamped)

Nếu điểm cực tiến gần về không σ càng bé, đường bao giảm càng lâu, lúc đó ta có dao đông không tắt.

Hệ thống bậc hai này sẽ có: điểm cực nằm ở gốc toạ độ do đáp ứng tín hiệu bậc thang đầu vào và hai điểm cực của hệ thống chỉ có phần ảo ($\sigma = 0$).

Từ hình 3.19d

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)} \tag{3.50}$$

Hai điểm cực $p_{1,2} = \pm j3$ tạo ra đáp ứng dao động hình sin mà tần số của nó bằng vị trí của các điểm cực nằm trên trục ảo. Đáp ứng đầu ra là:

$$c(t) = K(1 - e^{-\sigma t}(\cos\omega t + \frac{\sigma}{\omega}\sin\omega t)) = K[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}(\cos(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega}\right))] \tag{3.51}$$

Thay vào ta có

$$c(t) = 1 - \cos 3t \tag{3.52}$$

3.5.4 Hệ thống đáp ứng tắt dần tới hạn (Critically Damped Response)

Đây là đáp ứng đạt tới giá trị ổn định nhanh nhất. Giá trị giới hạn luôn luôn bằng 1.

Ta có đáp ứng sau:

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)} = \frac{9}{s(s+3)^2} \tag{3.53}$$

Đáp ứng này có một điểm cực nằm tại gốc toạ độ và hai điểm cực thực.

$$c(t) = 1 - 3te^{-3t} - e^{-3t} \tag{3.54}$$

Xem dạng đáp ứng hình 3.19d

3.5.5 Tìm đáp ứng tự do

- Đáp ứng tắt dần:

Các điểm cực: hai điểm thực $-\sigma_1, \sigma_2$

Đáp ứng: $$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t} \tag{3.55}$$

- Đáp ứng dưới tắt dần

Các điểm cực: 2 nghiệm phức $-\sigma_d \pm j\omega_d$

Đáp ứng: $$c(t) = Ae^{-\sigma_d t}\cos(\omega_d t - \phi); \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma_d}{\omega_d}\right) \tag{3.56}$$

- Đáp ứng khộng bị nhụt

Các điểm cực: 2 điểm cực ảo $\pm j\omega$

Đáp ứng: $$c(t) = A\cos(\omega\, t - \phi); \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega}\right) \tag{3.57}$$

- Đáp ứng tắt dần tới hạn

Các điểm cực: 2 điểm cực thực (kép) σ_1

Đáp ứng: $$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_1 t} \tag{3.58}$$

3.6. Một số vấn đề chung về hệ thống bậc hai

Trong phần này ta sẽ xem xét hai khái niệm của hai thông số hệ thống bậc 2 được dùng để miêu tả đường đặc tính đáp ứng thời gian. Đó là tần số tự do (natural frequency) và hệ số tắt dần (damping ratio).

- *Tần số tự do* (Natural Frequency, ω_n): là tần số của dao đông trong hệ thống mà không có sự tắt dần.

- *Hệ số tắt dần* (Damping ratio ξ):

$$\xi \quad \frac{\text{Tần số suy giảm hàm mũ}}{\text{Tần số tự do (rad/second)}} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\text{Chu kì tự do (seconds)}}{\text{Hằng số mũ}} \qquad (3.59)$$

Biểu diễn hệ thống bậc hai theo hai thông số ω_n và ξ

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \qquad (3.60)$$

Đối với hệ thống không bị nhụt ta có các điểm cực nằm trên trục ảo

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + b} \qquad (3.61)$$

Theo đinh nghĩa tần số dao động tự do ω_n là tần số của dao động trong hệ thống. Vì vậy các điểm cực nằm trên trục ảo là $\pm j\sqrt{b}$. Suy ra

$$\omega_n = j\sqrt{b} \qquad hay \qquad b = \omega_n^2 \qquad (3.62)$$

Với giả thiết hệ thống dưới tắt dần điểm cực phức có phần thực là –a/2. Độ lớn của giá trị này chính là tần số giảm hàm mũ

$$\xi \quad \frac{\text{Tần số suy giảm hàm}}{\text{Tần số tự do}} = \frac{|\sigma|}{\omega_n} = \frac{a/2}{\omega_n} \qquad (3.63$$

suy ra $a = 2\xi\omega_n$ (3.64)

Vậy hàm truyền là

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (3.65)$$

Ví dụ 3.4:

Cho hàm truyền sau:

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4.2s + 36} \tag{3.66}$$

So sánh hai công thức (3.66) và (3.65) ta có:

$$\omega_n^2 = 36 \Rightarrow \omega_n = 6$$
$$2\xi\omega_n = 4.2 \Rightarrow \xi = 0.35$$

Ta tìm các điểm cực của hệ thống:

Phương trình đặc trưng là: $s^2 + 4.2s + 36 = 0$

Có hai nghiệm phức:

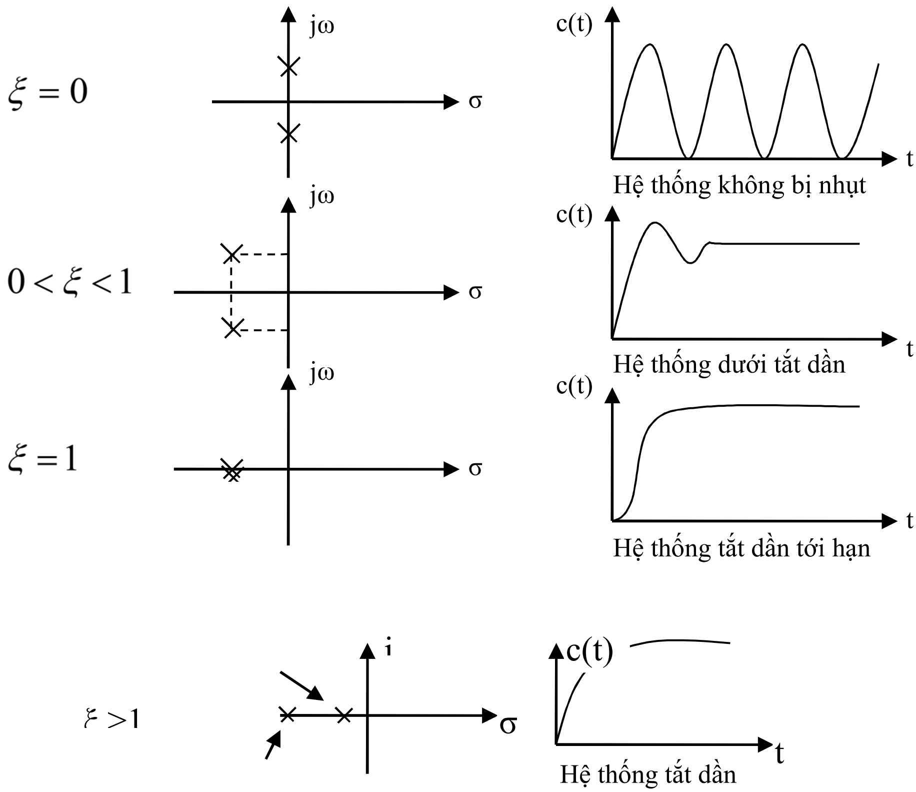
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{3.67}$$

Đường đặc tính đáp ứng từ giá trị của ξ

Từ $a = 2\xi\omega_n$ và $\omega_n = \sqrt{b}$ suy ra

$$\xi = \frac{a}{2\sqrt{b}} \tag{3.68}$$

Ta có các đáp ứng tương ứng với giá trị của ξ như sau:



Hình 3.21 : Đáp ứng bậc hai theo hệ số tắt dần

3.7 Hệ thống bậc hai dưới tắt dần (Underdamped)

Hệ thống dưới tắt dần, mô hình vật lí phổ biến, có các đáp ứng đơn nhất nên được xem xét cụ thể hơn. Định nghĩa các thống số đáp ứng của hệ thống dưới tắt dần theo thời gian và xem xét mối quan hệ với vị trí các điểm cực.

Trước tiên ta tìm đáp ứng của hệ thống bậc hai với đáp ứng tín hiệu bậc thang đơn vị

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{3.69}$$

Giả thiết ξ < 1 và thực hiện biến đổi ta được

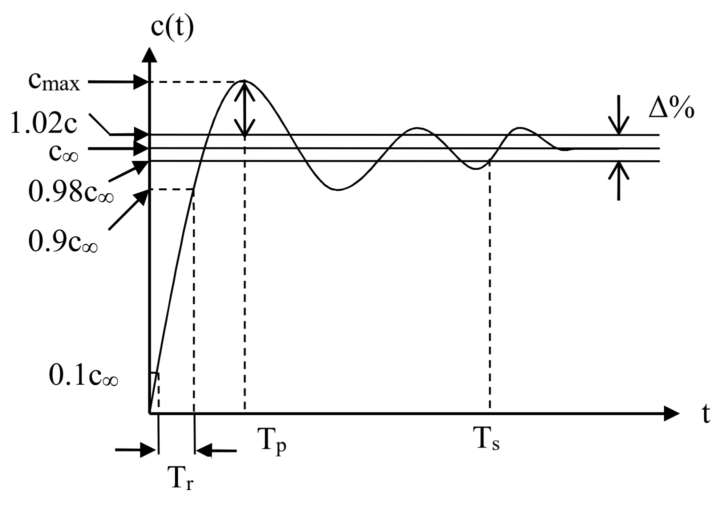
$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{(s+\xi\omega_n) + \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} \tag{3.70}$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace ngược

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t - \phi) \end{aligned} \tag{3.71}$$

trong đó: $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$

Khi ξ càng nhỏ thì đáp ứng dao động càng nhiều.



Hình 3.22: Đáp ứng bậc hai của hệ thống dưới tắt dần

Ngoài hai khái niệm hệ số suy giảm ξ và tần số đáp ứng tự do ω_n ta có thêm các khái niệm sau:

- Thời gian đỉnh T_p (Peak Time): là thời gian mà c(t) đạt max đầu tiên.

- Phần trăm độ quá điều chỉnh: %OS (Percent Overshoot): là khoảng mà dạng sóng vượt quá giá trị ổn định c_∞.

- Thời gian tăng T_r (rise time): thời gian tăng được định nghĩa là thời gian mà được đặc tính mấp mô đi từ 0.1 đến 0.9 giá trị xác lập.

- Thời gian xác lập hay thời gian ổn định T_s (settling time): thời gian xác lập là khoảng thời gian mà đáp ứng đạt đến và sai số trong khoảng ±2%.

a) Tính T_p

$$L\{\dot{c}(t)\} = sC(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} = \frac{\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} \tag{3.72}$$

Biến đổi Laplace ngược ta có:

$$\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\sqrt{1-\xi^2}\, t \tag{3.73}$$

Cho $\dot{c}(t) = 0$ suy ra

$$\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t = n\pi \tag{3.74}$$

hay

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \tag{3.75}$$

Khi n = 1 đường đặc tính đạt giá trị max

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \tag{3.76}$$

b) Tính phần trăm độ quá điều chỉnh

Từ Hình vẽ 3.22 ta có

$$\%OS = \frac{c_{max} - c_\infty}{c_\infty} x100 \tag{3.77}$$

c_{max} là giá trị khi đường đặc tính đạt giá trị max tại thời điểm T_p

$$\begin{aligned} c_{max} &= c(T_p) = 1 - e^{-\xi\omega_n/\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\pi\right) \\ &= 1 + e^{-\xi\omega_n/\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned} \tag{3.78}$$

Đối với tín hiệu bậc thang đơn vị

$c_\infty = 1$ (3.79)

Thay vào công thức (3.77) ta tìm được phần trăm độ quá điều chỉnh

$$\%OS = e^{-\xi\omega_n/\sqrt{1-\xi^2}} x100 \tag{3.80}$$

Suy ra

$$\xi = \frac{-\ln\left(\%OS/100\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\%OS/100\right)}} \tag{3.81}$$

c) Tính T_s

Để tìm được T_s ta phải tìm được thời gian mà c(t) đạt đến và giữ ổn định trong khoảng ± 2%.

Từ công thức (3.71) ta tính biên độ của c(t) đạt đến 0.02

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} = 0.02 \tag{3.82}$$

với giả thiết $\cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t - \phi) = 1$ tại T_s.

Suy ra $T_s = \dfrac{-\ln\left(0.02\sqrt{1-\xi^2}\right)}{\xi\omega_n}$

(3.83)

Lấy xấp xỉ công thức (3.83)

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{2}{a} \tag{3.84}$$

d) Tính T_r

Tìm $\omega_n t$ bằng cách cho c(t) = 0.9 và c(t) = 0.1. Lấy gần đúng ta được thời gian tăng $\omega_n T_r$.

Ví dụ 3.5: Cho hàm truyền sau

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100} \tag{3.85}$$

Tính T_p, %OS, T_s và T_r.

Giải:

Từ hàm truyền ta tính được $\omega_n = 10, \xi = 0.75$

Thay vào công thức tính T_p

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{3.14}{10\sqrt{1-0.75^2}} = 0.475$$

$$\%OS = e^{-\xi\omega_n/\sqrt{1-\xi^2}} x100 = e^{-0.75x10/\sqrt{1-0.75^2}} x100 = 2.838$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.75x10} = 0.533$$

Ta có bảng sau:

Hệ số suy giảm	**Thời gian tăng thông thường**
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Dựa vào bảng trên ta tính được thời gian tăng thông thường xấp xỉ 2.3 suy ra

$T_r = 0.23$ vì $\omega_n = 10$.

CHƯƠNG 4: KHẢO SÁT ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

4.1. Khái niệm về ổn định của hệ thống điều khiển tự động

Định nghĩa:

Tính ổn định của hệ thống là khả năng của hệ thống tự trở lại trạng thái xác lập sau khi các tác động phá vỡ trạng thái xác lập đã có mất đi.

Thực chất khi nói tới ổn định là nói tới một đại lượng được điều khiển nào đó ổn định. Một hệ thống ĐKTĐ là một hệ thống động học, thường được mô tả bằng phương trình vi phân bậc cao:

$$a_0\frac{d^n y(t)}{dt^n}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^m y(t)}{dt^m}+\cdots+b_{m-1}\frac{dx(t)}{dt}+b_m x(t) \quad (4.1)$$

Nghiệm của phương trình vi phân này gồm hai thành phần :

$$y(t) = y_{qđ}(t) + y_0(t) \quad (4.2)$$

- $y_{qđ}$ (t): là nghiệm tổng quát của (4.1) khi vế phải bằng 0, đặc trưng cho quá trình quá độ.

- y_0 (t): là nghiệm riêng của (4.1) khi có vế phải, nó đặc trưng cho quá trình xác lập .

Quá trình xác lập là quá trình ổn định, vì vậy chỉ cần xét quá trình quá độ. Nếu quá trình quá độ theo thời gian bị triệt tiêu thì hệ ổn định, nếu không triệt tiêu thì hệ không ổn định. Mà nghiệm quá độ được biểu diễn bằng biểu thức tổng quát sau:

$$y_{qd} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t} \quad (4.3)$$

Trong đó s_i là nghiệm của phương trình đặc trưng :

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + . \ . \ . + a_n = 0 \quad (4.4)$$

Từ những nhận xét trên ta có thể kết luận như sau: Một hệ thống được gọi là ổn định nếu quá trình quá độ tắt dần theo thời gian. Hệ thống không ổn định nếu quá trình quá độ tăng dần theo thời gian. Hệ thống ở biên giới ổn định nếu quá trình quá độ không đổi hoặc dao động không tắt dần.

Biểu diễn bằng biểu thức toán học định nghĩa trên ta có hệ thống ổn định khi:

$$\lim_{t\to\infty} y_{qd}(t) = \lim \sum_{i=1}^{n} C_i\, e^{s_i t} = 0 \tag{4.5}$$

và hệ không ổn định khi:

$$\lim_{t\to\infty} y_{qd}(t) = \lim \sum_{i=1}^{n} C_i\, e^{s_i t} = \infty \tag{4.6}$$

Hệ thống được xét là hệ dừng, nghĩa là các hệ số a_i không biến đổi theo thời gian.

$$\lim_{t\to\infty} \sum C_i e^{s_i t} = \lim_{t\to\infty} \sum C_i e^{\alpha_i t} = 0 \tag{4.7}$$

Nếu $\alpha_i < 0$ Hệ ổn định, nếu $\alpha_i = 0$ hệ ở biên giới ổn định, nếu $\alpha_i > 0$ hệ không ổn định.

Khi s_i là cặp nghiệm phức liên hợp $s_i = \alpha_i \pm j\,\beta_i$

$$C_i e^{(\alpha_i + j\beta)t} + C_{i+1} e^{(\alpha_i + j\beta)t} = 2Ae^{\alpha_i t}\cos(\beta t + \varphi) \tag{4.8}$$

Nếu $\alpha_i < 0$ Hệ ổn định , nếu $\alpha_i = 0$ hệ ở biên giới ổn định , nếu $\alpha_i > 0$ hệ không ổn định.

4.2 Nhận xét chung

- *Hệ thống sẽ ổn định khi và chỉ khi tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính có phần thực âm (tất cả các nghiệm nằm ở nửa bên trái mặt phẳng phức).*

- Hệ thống sẽ ở biên giới ổn định nếu phương trình đặc tính có ít nhất một nghiệm thuần ảo còn tất cả các nghiệm khác là nghiệm thực âm hoặc nghiệm phức có phần thực âm (có ít nhất một nghiệm nằm trên trục ảo còn các nghiệm còn lại nằm ở nửa trái mặt phẳng phức).

- Hệ thống sẽ không ổn định nếu phương trình đặc tính có ít nhất một nghiệm có phần thực dương (có ít nhất một nghiệm nằm ở nửa phải mặt phẳng phức).

Như vậy để xét tính ổn định của hệ thống ta cần phải tìm nghiệm của phương trình vi phân (4.1) rồi lấy giới hạn. Việc này rất khó khăn, nên để xét ổn định chỉ cần tìm nghiệm của phương trình đặc trưng (4.3). Trong thực tế người ta tìm mối quan hệ giữa các hệ số của phương trình đặc trưng với các nghiệm có phần thực âm để đánh giá tính ổn định của hệ. Đó là các tiêu chuẩn ổn định. Có hai tiêu chuẩn ổn định:

- Tiêu chuẩn ổn định đại số: Tìm điều kiện ràng buộc giữa các hệ số của phương trình đặc tính để hệ ổn định. Đó là các tiêu chuẩn Routh, Hurwitz.

- Tiêu chuẩn ổn định tần số: Thông qua đặc tính tần số của hệ thống để xét tính ổn định. Đó là các tiêu chuẩn ổn định Mikhailôp, Nyquist.

4.3 Tiêu chuẩn ổn định đại số

Điều kiện ổn định cần thiết của HTĐKTĐ:

Giả sử hệ thống có phương trình đặc tính: $a_0s^n + a_1s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n = 0$

Như vậy phương trình đặc tính có hai loại nghiệm :

Có m nghiệm thực ($s_i = -\alpha_i$) *và* $(n - m)/2$ *nghiệm phức* ($s_i = -\alpha_k \pm j\omega_k$).

Với α_i, α_k, ω_k *đều dương.*

Phương trình đặc tính được chuyển sang dạng:

$$a_0 \prod_{i=1}^{m} (s+\alpha_i).\prod_{k=1}^{\frac{n-m}{2}} (s+\alpha_k - j\omega_k)(s+\alpha_k + j\omega_k) = 0 \qquad (4.9)$$

suy ra:

$$a_0 \prod_{i=1}^{m} (s+\alpha_i).\prod_{k=1}^{\frac{n-m}{2}} ((s+\alpha_k)^2 + \omega_k^2) = 0 \qquad (4.10)$$

Nếu ta khai triển phương trình trên sẽ được một đa thức có tất cả các hệ số đều dương. *Như vậy điều kiện cần thiết để hệ thống ổn định là tất cả các hệ số của phương trình đặc tính phải dương (phải cùng dấu).*

4.3.1 Tiêu chuẩn Routh

- Phát biểu tiêu chuẩn: " *Điều kiện cần và đủ để cho hệ thống tuyến tính ổn định là tất cả các số hạng trong cột thứ nhất của bảng Routh dương* ".

- Cách thành lập bảng Routh

Giả sử cho phương trình đặc tính sau:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3\, s^{n-3} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (4.11)$$

Hai hàng đầu bảng Routh được sắp xếp như sau :

a_0	a_2	a_4	a_6 …
a_1	a_3	a_5	a_7 …
b_0	b_2	b_4	b_6 …
b_1	b_3	b_5	b_7 …
c_0	c_2	c_4	c_6 …

Các số hạng trong các hàng được tính theo biểu thức sau :

Nhận xét :

Mỗi một số hạng trong một hàng của bảng Routh là một thương số

$$b_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}}{b_0} = \frac{b_0 a_3 - a_1 b_2}{b_0}; b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_0 & b_4 \end{vmatrix}}{b_0} = \frac{b_0 a_5 - a_1 b_4}{b_0}$$

$$c_0 = -\frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1}; c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 b_4 - b_0 b_5}{b_1}$$

có:

- *Tử số*: là một định thức hạng hai mang dấu âm với cột thứ nhất của nó cũng là cột thứ nhất của hai hàng đứng sát trên hàng có số hạng đang tính ,còn cột thứ hai của định thức chính là cột đứng sát bên phải số hạng đang tính cũng của hai hàng trên.

- *Mẫu số*: trong tất cả các số hạng của một hàng có chung mẫu số chính là số hạng đứng ở cột thứ nhất và ở hàng sát ngay trên số hạng đang tính.

Ví dụ 4.1: Cho phương trình đặc tính của hệ thống :

$$s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 3 = 0 \qquad (4.12)$$

Lập bảng Routh :

1	8	3
2	4	0
6	3	
3	0	
3		

Hệ thống ổn định vì tất cả các số hạng trong cột thứ nhất dương.

Một số tính chất của bảng Routh

- Khi lập bảng Routh, để giản đơn trong tính toán, có thể nhân hay chia các hệ số trong cột với cùng một đại lượng, kết quả vẫn không thay đổi.

- Trong trường hợp hệ không ổn định, bao nhiêu lần đổi dấu ở cột 1 thì có bấy nhiêu nghiệm ở nửa phải mặt phẳng phức.

- Nếu trị số gần cuối ở cột một bằng 0 ($C_{1n} = 0$) có nghĩa là nghiệm kép thuần ảo. Trị số cuối cùng sẽ không tính được vì $r_{n+1} = \propto$. Nếu trị số cuối cùng bằng 0 ($C_{1n+1} = 0$) thì phương trình đặc trưng có một nghiệm bằng 0 vì $a_n = 0$.

- Nếu các hệ số của một hàng bằng 0, hệ có nghiệm phải hoặc cặp nghiệm nằm trên trục ảo.

4.3.2 Tiêu chuẩn Hurwitz

Phát biểu tiêu chuẩn.

Điều kiện cần và đủ để hệ tuyến tính ổn định là hệ số $a_0 > 0$ và các định thức Hurwitz dương.

Thành lập định thức Hurwtiz.

Định thức Hurwitz lập từ ma trận hệ số theo quy tắc sau:

- Theo đường chéo của ma trận, viết các hệ số từ a_1 đến a_n.
- Phía trên đường chéo, các hệ số tăng dần, phía dưới giảm dần.
- Các hệ số nhỏ hơn a_0 và lớn hơn a_n đều bằng 0.

Ma trận có dạng như sau:

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \cdots & \Delta_n \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_n \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

Các định thức Hurwitz dương tương ứng với :

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_3^2 a_0 + a_5 a_1 a_0 > 0$$

....

$\Delta_{n-1} > 0$

$\Delta_n = a_n . \Delta_{n-1} > 0$

Lưu ý: Khi khảo sát tính ổn định với $a_0 > 0$, nếu có hệ số bất kỳ nào âm ($a_i < 0$) thì đủ để kết luận là hệ không ổn định.

Với điều kiện $a_i > 0$ ($i = 0,1,2...n$) thì chỉ cần xét $\Delta_i > 0$ với $i = 2, ... n-1$ là được, vì $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_n = a_n . \Delta_{n-1}$.

Chú ý: Tiêu chuẩn ổn định Hurwitz chỉ là một dạng biểu diễn khác của tiêu chuẩn Routh. Nó chỉ dùng với hệ thống có phương trình đặc tính bậc thấp (dưới bậc 4).

4.3.3 Một số trường hợp của tiêu chuẩn Routh – Hurwitz

Hai trường hợp đặc biệt có thể xảy ra:

- Xuất hiện số 0 ở cột thứ nhất.

- Xuất hiện một hàng toàn số 0.

a) Trường hợp thứ nhất: Số 0 ở cột thứ nhất

Nếu có số 0 ở cột thứ nhất thì việc tạo ra hàng tiếp theo sẽ chia cho số 0. Để tránh trường hợp này ta gán một giá trị ϵ để thay thế số 0. Sau đó dùng ε để tính toán và xét dấu cho ϵ(±ϵ).

Ví dụ 4.2: Xác định tính ổn định của hàm truyền hệ kín sau:

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3} \tag{4.14}$$

Lập bảng Routh và xét dấu

						ϵ =+	**ϵ= -**
s^5	1	3	5	s^5	1	+	+
s^4	2	6	3	s^4	2	+	+
s^3	**0 ≡ ϵ**	7/2	0	s^3	0 ≡ ϵ	+	-
s^2	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	3	0	s^2	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	-	+
s^1	$\frac{-6\varepsilon^2 + 42s - 42\varepsilon}{12\varepsilon - 14}$	0	0	s^1	$\frac{-6\varepsilon^2 + 42s - 42\varepsilon}{12\varepsilon - 14}$	+	+
s^0	3	0	0	s^0	3	+	+

Nhìn bảng xét dấu cả trong hai trường hợp € = ± thì ở cột thứ nhất đổi dấu hai lần có nghĩa là phương trình đặc tính có hai nghiệm nằm bên phải trục ảo. Do vậy hệ thống trên là không ổn định.

b) Có một hàng toàn số không

Khi gặp trường hợp này ta đầu tiên ta quay lại hàng phía trên hàng có toàn số 0 và thành lập một đa thức phụ mà sử dụng các giá trị của hàng đó làm hệ số. Đa thức bắt đầu với luỹ thừa của s ở cột kí hiệu s và bỏ biến tiếp theo và thực hiện hạ bậc đa thức phụ.

Ví dụ 4.3: Xác định số nghiệm nằm bên phải trục ảo của hệ kín sau:

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56} \tag{4.15}$$

Lập bảng Routh

s^5	1	6	8
s^4	$\cancel{7}$ 1	42 6	56 8
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{4}$ 1	$\cancel{0}$ $\cancel{12}$ 3	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0
s^2	3	8	0
s^1	1/3	0	0
s^0	8	0	0

Đa thức phụ : $P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$ (4.16)

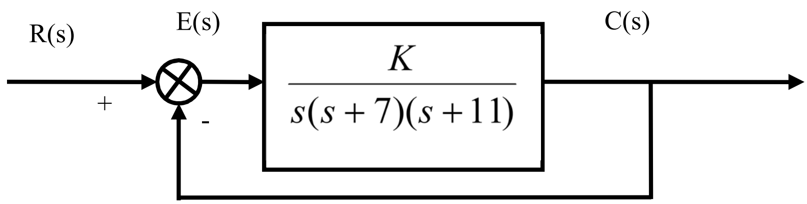
Lấy vi phân đa thức (4.16)

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0 \tag{4.17}$$

Sử dụng các hệ số trong đa thức (4.17) để thay thế hàng có toàn số 0. Sau khi thay và tính toán ta thấy cột đầu tiên các hệ số đều dương do vậy không có điểm cực nào nằm bên phải trục ảo.

4.3.4 Sử dụng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz để thiết kế sự ổn định

Ví dụ 4.4: Cho hệ thống sau:



Hình 4.1 : Hệ thống có hệ số khuếch đại K chưa biết

Tìm phạm vi của hệ số khuếch đại K để hệ thống ổn định, không ổn định hay ở biên giới ổn định.

Giải:

Hàm truyền của hệ kín là

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K} \tag{4.18}$$

Thành lập bảng Routh

s^3	**1**	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386-K}{18}$	

s^0	s^0	K

Giả thiết K > 0. Các phần tử trong cột đầu tiên đều dương ngoại trừ ở hàng s^1. Giá trị có thể dương, âm hay bằng không tuỳ thuộc vào giá trị của K.

Nếu K < 1386 thì tất cả các phần tử của cột đầu tiên đều dương, không có sự đổi dấu do vậy các điểm cực nằm bên trái trục ảo. Vậy hệ thống ổn định với K < 1386.

Nếu K > 1386 thì phần tử ở hàng s^1 âm và trong cột đầu tiên có sự đổi dấu hai lần do vậy có hai nghiệm nằm bên phải trục ảo và một nghiệm nằm bên trái trục ảo. Điều này có nghĩa là hệ thống không ổn định khi K > 1386.

Nếu K = 1386 thì sẽ xuất hiện số 0 ở hàng s^1 quay lại hàng s^2 và thay K = 1386.

Sau đó lập đa thức phụ

$$P(s) = 18s^2 + 1386 \tag{4.19}$$

Lấy vi phân

$$\frac{dP(s)}{ds} = 36s + 0 \tag{4.20}$$

Thay các hệ số trong đa thức 5.20 vào bảng Routh

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	$\cancel{0}$ 36	
s^0	1386	

Nhận xét:

- Các phần tử trong cột thứ nhất đều dương và không có sự đổi dấu.

- Đa thức có bậc chẵn (s^2) có hai nghiệm nằm trên trục ảo và nghiệm còn lại nằm bên trái trục ảo.

Do vậy hệ thống ở biên giới ổn định khi K = 1386.

4.4 Xét ổn định cho hệ có mô tả toán học dưới dạng mô hình trạng thái.

Cho hệ thống có mô hình trạng thái là như sau:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Điều kiện cần và đủ để cho hệ thống ổn định là các giá trị riêng của ma trận A phải nằm bên trái trục ảo của mặt phẳng phức.

Trong đó trị riêng của ma trận A được tìm bằng cách giải phương trình.

$$\det(sI - A) = 0 \tag{4.22}$$

Ví dụ 4.5: Cho hệ thống có mô hình trạng thái:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\underline{x} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ta có:

$$\det(sI - A) = \left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s(s+3) + 2 = s^2 + 3s + 2 = 0$$

Có hai nghiệm là: $s_1 = -1$ và $s_2 = -2$, đây là các giá trị riêng của ma trận A. Vì các giá trị riêng này đều nằm bên trái trục ảo cho nên hệ thống ổn định.

Ví dụ 4.6: Hệ thống được mô tả toán học như sau:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Tìm xem có bao nhiêu điểm cực nằm trên, bên trái và bên phải trục ảo.

Giải:

Tính det(sI - A):

$$\det(sI - A) = \left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -3 & -1 \\ -2 & s-8 & -1 \\ 10 & 5 & s+2 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 - 6s^2 - 7s - 52 = 0$$

Thành lập bảng Routh

s^3	1	-7
s^2	~~-6~~ -3	~~-52~~ -26
s^1	~~-47/3~~ -1	~~0~~ 0
s^0	-26	

Từ bảng Routh ta thấy trong cột đầu tiên đổi dấu một lần, hệ thống có một điểm cực nằm bên phải và hai điểm cực nằm bên trái trục ảo suy ra hệ thống không ổn định.

CHƯƠNG 5: CHẤT LƯỢNG HỆ THỐNG

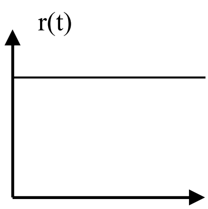
5.1 Mở đầu

Trong chương 4, ta đã xét ổn định của hệ thống là chỉ tiêu đầu tiên để nói rằng hệ thống có hoạt động hay không, còn chất lượng quá trình quá độ mới đề cập đến hệ thống có sử dụng được hay không. Cụ thể ở đây ta xem xét đến sai số ở trạng thái xác lập và cách thức điều khiển. Mặt khác hệ thống điều khiển được thiết khi phải cân bằng giữa đáp ứng thời gian như mong muốn, sai số ở trạng thái xác lập và các yêu cầu về sự ổn địng của hệ hệ thống.

Trước hết xem xét sai số ở trạng thái xác lập là gì?

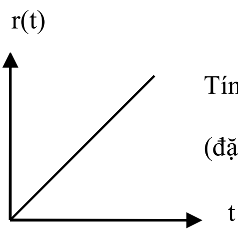
Sai số ở trạng thái xác lập (steady-state error) là sự sai lệch giữa tín hiệu vào đối với tín hiệu thử đầu vào khi t→ ∞.

Các tín hiệu thử đầu vào được sử dụng để thiết kế và phân tích sai số xác lập



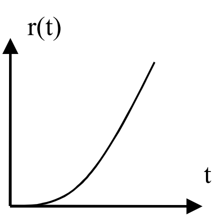
Tín hiệu bậc thang đơn vị r(t) = 1 $\rightarrow \dfrac{1}{s}$

(đặc trưng cho hằng số vị trí)



Tín hiệu có sườn dốc r(t) = t $\rightarrow \dfrac{1}{s^2}$

(đặc trưng cho hằng số vận tốc)



Tín hiệu bậc hai (Parabol)

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \rightarrow \frac{1}{s^3}$$

Hình 5.1: Các tín hiệu thử

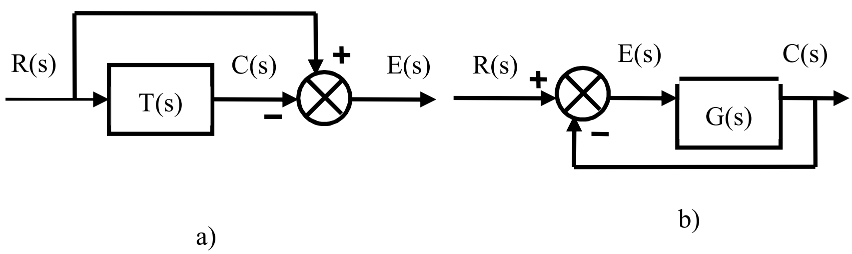
Ứng dụng đối với hệ thống ổn định. Sự sai lệch giữa đầu vào và đầu ra của hệ thống điều khiển phản hồi sau khi trạng thái ổn định đã đạt được. Trong chương này chỉ xét đến hệ thống ổn định mà đáp ứng tự do tiến về không khi t → ∞.Việc tính toán sai số ở trạng thái xác lập có thể áp dụng sai cho hệ thống không ổn định. Vì vậy khi phân tích và thiết kế ta phải kiểm tra tính ổn định của hệ thống.

Ta có hai dạng sau:

T(s) là hàm truyền của hệ kín, E(s) là sai số, C(s) là tín hiệu đầu ra, G(s) là hàm truyền của hệ hở.

- Sai lệch giữa đầu vào và đầu ra thuần tuý T(s) (Hình 5.2 a)

- Sai lệch trong hệ thống phản hồi đơn vị G(s)(Hình 5.2 b)



Hình 5.2: Các dạng phản hồi

Nguồn gốc gây sai số

Rất nhiều sai số ở trạng thái xác lập là do từ các nguồn phi tuyến như là khe hở trong hộp số hay động cơ sẽ không chạy khi có sự vượt quá điện áp.

Nếu G(s) trong Hình 5.2b là hệ số khuếch đại K thì sai số E(s) = R(s) – C(s). Xét hệ thống với tín hiệu đầu vào là tín hiệu bậc thang đơn vị. Ở trạng trạng thái xác lập, nếu c(t) = r(t) thì e(t) = 0. Nhưng K là hệ số khuếch đại thuần nên sai số e(t) không thể bằng không được, nó nhất định tồn tại trong hệ thống. Nếu ta gọi $c_{steady\text{-}state}$ là giá trị xác lập của đầu ra và $e_{steady\text{-}state}$ giá trị xác lập của sai số thì

$$c_{steady\text{-}state} = Ke_{steady\text{-}state} \tag{5.1}$$

5.2 Sai số ở trrạng thái xác lập (SSE) cho hệ thống phản hồi đơn vị

Sai số ở trạng thái xác lập có thể được tính từ hàm truyền vòng kín của hệ thống T(s) hoặc từ hàm truyền của vòng hở G(s) trong hệ thống phản hồi đơn vị.

5.2.1 SSE đối với T(s)

Từ Hình 5.2a) ta có:

$$E(s) = R(s) - C(s) \tag{5.2}$$

Và

$$C(s) = R(s)T(s) \tag{5.3}$$

Thay công thức 5.2 vào 5.1 ta được

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)] \tag{5.4}$$

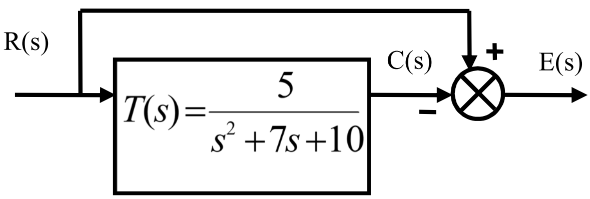
Ta cần tìm e(∞) ta áp dụng định lý giá trị xác lập được tính toán từ biến đổi Laplace

$$\begin{aligned}
&L\left[\dot{f}(t)\right] = \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0-) \\
&s \to 0 \\
&\int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)dt = f(\infty) - f(0-) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0-) \\
&hay \qquad f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Nên ta có

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)[1 - T(s)] \quad (5.6)$$

Ví dụ 5.1: Tìm sai số ở trạng thái xác lập của hệ thống sau



Hình 5.3: Hệ thống có sai số ở trạng thái xác lập với T(s)

Với tín hiệu đầu vào là tín hiệu bậc thang đơn vị.

Giải:

Tín hiệu vào R(s) = 1/s

Thay R(s) và T(s) vào công thức 5.5

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)] == \frac{s^2 + 7s + 5}{s(s^2 + 7s + 10)} \quad (5.7)$$

Vì T(s) là ổn định nên E(s) không có các điểm cực bên phải trục ảo hay là nằm trên trục ảo hay là ở gốc toạ độ vì vậy ta có thể áp dụng định lý giá trị xác lập suy ra

$$e(\infty) = 1/2$$

5.2.2 SSE cho G(s)

Xem xét hệ thống phản hồi ở Hình 5.2b). Khi hàm truyền phản hồi H(s) = 1 nên ta có hệ thống phản hồi đơn vị. Thực chất E(s) vẫn là sai số giữa đầu ra C(s) và đầu vào R(s). Do vậy ta tìm công thức biểu diễn E(s) sau đó áp dụng định lý giá trị xác lập.

$$E(s) = R(s) – C(s) \quad (5.8)$$

Mà

$$C(s) = E(s)G(s) \tag{5.9}$$

Thay công thức 5.9 vào 5.8 ta rút ra được

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} \tag{5.10}$$

Áp dụng định lý giá trị xác lập với giả thiết hệ kín ổn định

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{R(s)}{1 + G(s)} \tag{5.11}$$

Ta xem xét mối quan hệ giữa hệ hở G(s) và sai số xác ở trạng thái xác lập của đáp ứng tự do bằng cách cho đầu vào lần lượt là các tín hiệu sau:

a) Tín hiệu bậc thang đơn vị (Step Input) R(s) = 1/s

$$e(\infty) = e_{step}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s\left(\frac{1}{s}\right)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \leftarrow 0} G(s)} \tag{5.12}$$

Xét $\lim_{s \leftarrow 0} G(s)$ như là hệ số khuếch đại một chiều của hàm truyền mạch thuận. Khi s là biến tần số tiến tới không. Để có sai số ở trạng thái xác lập bằng không thì

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \infty \tag{5.13}$$

Để thoả mãn được công thức 5.13 ta biểu diễn G(s) dưới dạng sau

$$G(s) \equiv \frac{(s + z_1)(s + z_2)\cdots}{s^n (s + p_1)(s + p_2)\cdots} \tag{5.14}$$

Nếu n ≥ 1 thì có ít nhất một điểm cực nằm ở gốc toạ độ. Nên việc chia cho s trong miền tần số cung như là lấy tích phân trong miền thời gian, chúng ta thường nói rằng có ít nhất một bộ tich phân trong mạch thuận.

Nếu không có bộ tích phân nào thì n = 0 khi đó ta có

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots} \tag{5.15}$$

Tóm lại đối với tín hiệu vào hệ thống phản hồi đơn vị là bậc thang đơn vị thì sai số ở trạng thái xác lập bằng không khi có ít nhất một bộ tích phân ở trong mạch thuận.

b) Tín hiệu có sườn dốc (Ramp Input) R(s) = 1/s²

$$e(\infty) = e_{ramp}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s\left(1/s^2\right)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} sG(s)} \tag{5.16}$$

Để có sse = 0 đối với $R(s) = 1/s^2$ thì

$$\lim_{s \to 0} sG(s) = \infty \tag{5.17}$$

Để thoả mãn công thức 5.17 và G(s) được biểu diễn như (5.14) thì n ≥ 2 hay nối cách khác trong mạch thuận phải có ít nhất hai bộ tích phân.

Nếu chỉ có một bộ tích phân trong mạch thuận ta có

$$\lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots} \tag{5.18}$$

Trong trường hợp này sai số sẽ là một hằng số.

Nếu không có bộ tích phân nào trong mạch thuận thì

$$\lim_{s \to 0} sG(s) = 0 \tag{5.19}$$

Lúc đó sai số sẽ là vô hạn đường đáp ứng sẽ tách khỏi được đặc tính đầu vào.

c) Tín hiệu bậc hai Parabol (Parabolic Input) R(s) = 1/s³

$$e(\infty) = e_{parabola}(\infty) = \lim_{s\to 0}\frac{s\left(1/s^3\right)}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} \quad (5.20)$$

Để có sse = 0 đối với R(s) = $1/s^3$ thì

$$\lim_{s\to 0} s^2G(s) = \infty \quad (5.21)$$

Như trong trường hợp trên để thoả mãn thì trong mạch thuận phải có ít nhất 3 bộ tích phân.

Nếu trong mạch thuận có 2 bộ tích phân thì

$$\lim_{s\to 0} s^2G(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots} \quad (5.22)$$

và sai số sẽ là hằng số.

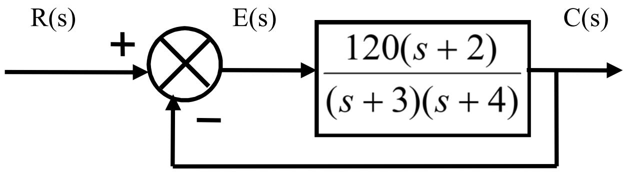
Nếu không có bộ tích phân nào thì

$$\lim_{s\to 0} s^2G(s) = 0 \quad (5.23)$$

và sai số sẽ là không xác định.

Ví dụ 5.2: SSE đối với hệ thống không có bộ tích phân

Cho tín hiệu đầu vào là 5u(t), 5tu(t) và $5t^2u(t)$ và u(t) là tín hiệu bậc thang đơn vị



Hình 5.4: Hệ thống không có bộ tích phân

Tính sai số của hệ thống ở trạng thái xác lập.

Giải:

Đầu tiên phải chỉ ra hệ thống kín là ổn định

- $r(t) = 5u(t) \rightarrow R(s) = 5/s$

$$e(\infty) = e_{step}(\infty) = \frac{5}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)} = \frac{5}{1+20} = \frac{5}{21} \tag{5.24}$$

- $r(t) = 5tu(t) \rightarrow R(s) = 5/s^2$

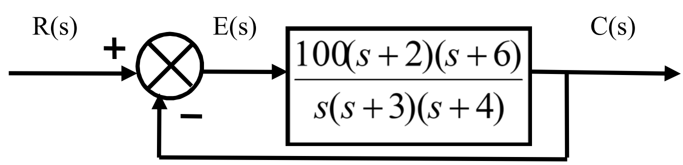
$$e(\infty) = e_{ramp}(\infty) = \frac{5}{\lim\limits_{s\to 0} s\,G(s)} = \frac{5}{0} = \infty \tag{5.25}$$

- $r(t) = 5t^2u(t) \rightarrow R(s) = 10/s^3$

$$e(\infty) = e_{parabola}(\infty) = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)} = \frac{10}{0} = \infty \tag{5.26}$$

Ví dụ 5.3: SSE cho hệ thống có một khâu tích phân

Cho tín hiệu đầu vào là $5u(t)$, $5tu(t)$ và $5t^2u(t)$ và $u(t)$ là tín hiệu bậc thang đơn vị



Hình 5.5: Hệ thống có một bộ tích phân

Tính sai số của hệ thống ở trạng thái xác lập.

Giải:

Đầu tiên phải chỉ ra hệ thống kín là ổn định

- $r(t) = 5u(t) \rightarrow R(s) = 5/s$

$$e(\infty) = e_{step}(\infty) = \frac{5}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)} = \frac{5}{\infty} = 0 \tag{5.27}$$

- r(t) = 5tu(t) → R(s) = 5/s^2

$$e(\infty) = e_{ramp}(\infty) = \frac{5}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \tag{5.28}$$

- r(t) = 5t^{2}u(t) → R(s) = 10/s^3

$$e(\infty) = e_{parabola}(\infty) = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)} = \frac{10}{0} = \infty \tag{5.29}$$

5.3 Hằng số sai số tĩnh và loại hệ thống

5.3.1 Hằng số sai số tĩnh

Ta xét hệ thống phản hồi âm đơn vị và định các thông số mà sử dụng như là sai số ở trạng thái xác lập, các thông số hoạt động là hệ số suy giảm, tần số tự do, thời gian xác lập, phần trăm độ quá điều chỉnh….như là các thông số hoạt động đối với đáp ứng thời gian. Các thông số hoạt động sai số ở trạng thái xác lập được gọi là hằng số sai số tĩnh.

Hằng số sai số tĩnh

Ta đã xác định được mối quan hệ giữa sse khi tín hiệu đầu vào u(t).

- r(t) = u(t) → R(s) = 1/s

$$e(\infty) = e_{step}(\infty) = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)} \tag{5.30}$$

- r(t) = tu(t) → R(s) = 1/s^2

$$e(\infty) = e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} \tag{5.31}$$

- r(t) =1/2 t^{2}u(t) → R(s) = 1/s^3

$$e(\infty) = e_{parabola}(\infty) = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} s^2 G(s)} \tag{5.32}$$

Ta có các khái niệm từ giới hạn của mẫu số gọi là các hằng số sai số tĩnh:

- Hằng số vị trí K_p

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) \tag{5.33}$$

- Hằng số vận tốc K_v

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) \tag{5.34}$$

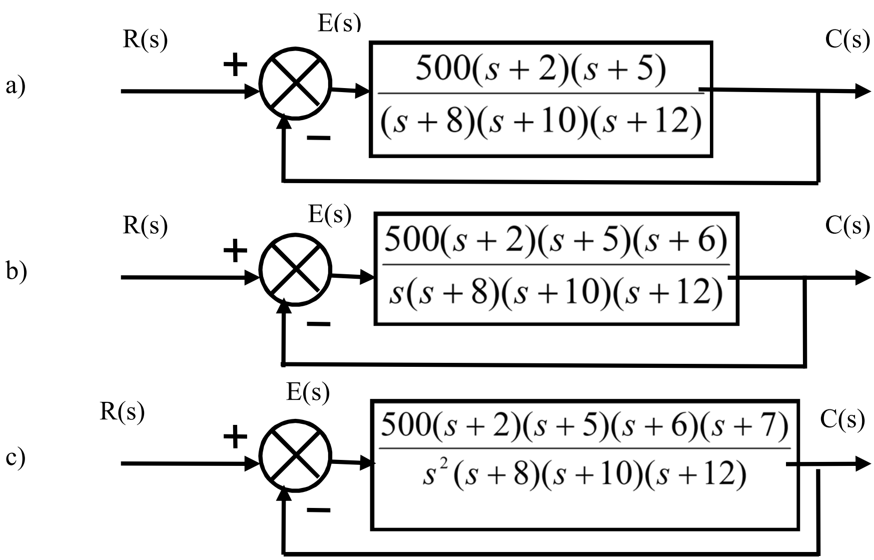
- Hằng số gia tốc K_a

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \tag{5.35}$$

Khi hằng số sai số ở trạng thái xác lập giảm thì hằng số sai số tĩnh tăng.

Sai số ở trạng thái xác lập qua các hằng số sai số tĩnh

Ví dụ 5.4: Cho các hệ thống sau



Hình 5.6: Hệ thống có một bộ tích phân

Tìm các hằng số sai số tĩnh và sai số khi cho các tín hiệu đầu vào chuẩn.

Giải:

Chỉ ra rằng các hệ thống kín ổn định.

Xét Hình 5.6a)

Các hằng số sai số tĩnh

- Hằng số vị trí K_p

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{500\times 2\times 5}{8\times 10\times 12} = 5.208 \tag{5.36}$$

- Hằng số vận tốc K_v

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = 0 \tag{5.37}$$

- Hằng số gia tốc K_a

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) \quad = 0 \tag{5.38}$$

Sai số ở trạng thái xác lập

- r(t) = u(t) → R(s) = 1/s

$$e(\infty) = e_{step}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0.161 \tag{5.39}$$

- r(t) = tu(t) → R(s) = $1/s^2$

$$e(\infty) = e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{K_v} = \infty \tag{5.40}$$

- r(t) =1/2 t^2u(t) → R(s) = $1/s^3$

$$e(\infty) = e_{parabola}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty \tag{5.41}$$

Xét Hình 5.6b)

Các hằng số sai số tĩnh

- Hằng số vị trí K_p

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \tag{5.42}$$

- Hằng số vận tốc K_v

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \frac{500\times 2\times 5\times 6}{8\times 10\times 12} = 31.25 \tag{5.43}$$

- Hằng số gia tốc K_a

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) \quad = 0 \tag{5.44}$$

Sai số ở trạng thái xác lập

- r(t) = u(t) → R(s) = 1/s

$$e(\infty) = e_{step}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0 \tag{5.45}$$

- r(t) = tu(t) → R(s) = $1/s^2$

$$e(\infty) = e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{31.25} = 0.032 \tag{5.46}$$

- r(t) =1/2 t^2u(t) → R(s) = $1/s^3$

$$e(\infty) = e_{parabola}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty \tag{5.47}$$

Xét Hình 5.6c)

Các hằng số sai số tĩnh

- Hằng số vị trí K_p

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \tag{5.48}$$

- Hằng số vận tốc K_v

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \infty \qquad (5.49)$$

- Hằng số gia tốc K_a

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) \; = \frac{500\times 2\times 5\times 6\times 7}{8\times 10\times 12} = 875 \qquad (5.50)$$

Sai số ở trạng thái xác lập

- r(t) = u(t) → R(s) = 1/s

$$e(\infty) = e_{step}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0 \qquad (5.51)$$

- r(t) = tu(t) → R(s) = $1/s^2$

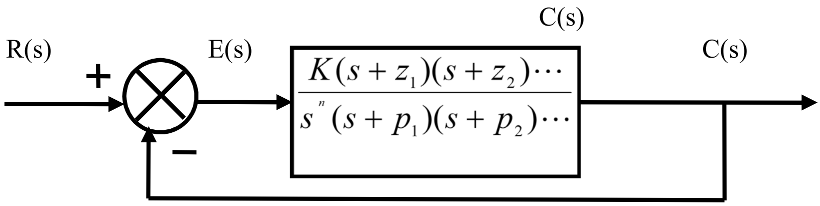
$$e(\infty) = e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0 \qquad (5.52)$$

- r(t) =1/2 t^2u(t) → R(s) = $1/s^3$

$$e(\infty) = e_{parabola}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{875} = 1.14\times 10^{-3} \qquad (5.53)$$

5.3.2 Loại hệ thống

Xét mạch phản hồi đơn vị âm. Các giá trị của các hằng số sai số tĩnh phụ thuộc vào dạng của hàm truyền G(s) đặc biệt là số bộ tích phân có trong mạch thuận. Các loại hệ thống được định nghĩa theo giá trị n ở mẫu số hoặc số lượng bộ tích phân có trong mạch thuận. Vì vậy hệ thống với n = 0 là hệ thống loại 0. Nếu n= 1 hoặc n =2 thì hệ thống tương ứng là loại 1 hoặc loại 2.



Hình 5.7: Hệ thống không có bộ tích phân

Ta có bảng sau thể hiện mối quan hệ giữa các thông số sai số tĩnh và loại hệ thống như sau:

Đầu vào	**Công thức tính SSE**	**Loại 0**		**Loại 0**		**Loại 0**	
		Hằng số sai số tĩnh	**Sai số**	**Hằng số sai số tĩnh**	**Sai số**	**Hằng số sai số tĩnh**	**Sai số**
u(t)	$\frac{1}{1+K_p}$	K_p = constant	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
tu(t)	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	K_v = constant	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞
$\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	K_a = constant	$\frac{1}{K_a}$

5.4 Các tham số kỹ thuật rút ra từ SSE

- Các hằng số sai số tĩnh có thể sử dụng để xác định các đặc tính của hệ thống điều khiển.

- Hệ số suy giảm ξ, thời gian quá độ Ts, thời gian đỉnh (thời gian cực đại) Tp và phần trăm độ quá điều chỉnh %OS được sử dụng như là các thông số của đáp ứng thời gian của hệ thống điều khiển.

- Hằng số vị trí K_p, hằng số vận tốc K_v và hằng số gia tốc K_a được sử dụng như là các thông số sai số ở trạng thái xác lập của hệ thống điều khiển. Ta có thể rút ra được nhiều thông tin chứa đựng trong các đặc tính của hằng số sai số tĩnh

Ví dụ 5.5: ta có $K_v = 1000$ chúng ta có thể rút ra các kết luận sau:

- Hệ thống là ổn định.

- Hệ thống là loại 1. Bởi vì chỉ có hệ thống loại 1 mới có hằng số K_v xác định.

- Tín hiệu đầu vào thử là tín hiệu xung sườn dốc Vì K_v được xác định như là một hằng số xác định.

- SSE là $1/K_v$.

Ví dụ 5.6: ta có $K_p = 1000$ chúng ta có thể rút ra các kết luận gì?

- Hệ thống là ổn định.

- Hệ thống là loại 0. Bởi vì chỉ có hệ thống loại 0 mới có hằng số K_p xác định.

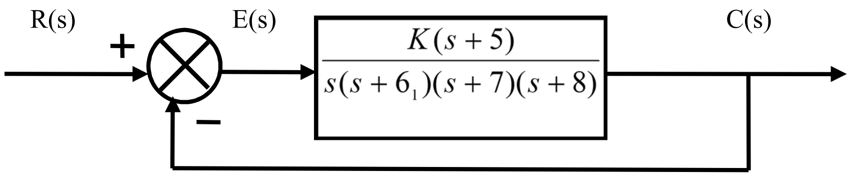
- Tín hiệu đầu vào thử là tín hiệu bạc thang đơn vị. Vì K_p được xác định như là một hằng số xác định.

- SSE là $1/K_p$.

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+1000} = \frac{1}{1001} \tag{5.54}$$

Ví dụ 5.7: Thiết kế hệ số khuếch đại thông qua đặc tính của SSE

Cho hệ thống sau:



Hình 5.8: Hệ thống không có bộ tích phân

Tìm hệ số khuếch đại K biết có 10% sai số ở trạng thái xác lập.

Giải:

Hệ thống là loại 1, sai số của hệ thống được thử với tín hiệu sườn dốc

$$e(\infty) = e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0.1 \quad (5.55)$$

Vì vậy

$$K_v = 10 = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{K\times 5}{6\times 7\times 8} = \quad (5.56)$$

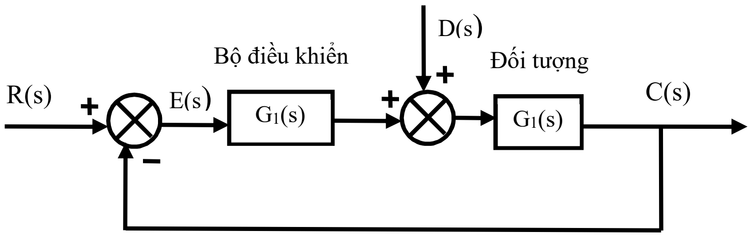
Từ công thức 5.57 rút ra

$$K = 672 \quad (5.57)$$

5.5 SSE cho nhiễu

Các hệ thống phản hồi được sử dụng để bù nhiễu hoặc các tín hiệu đầu vào không mong muốn. Ưu điểm của việc sử dụng phản hồi là không chú ý đến nhiễu, hệ thống có thể được thiết kế theo tín hiệu đầu vào có sai số nhỏ hoặc bằng 0.

Xét hệ thống sau:



Hình 5.9: Hệ thống phản hồi âm có nhiễu tác động

Hàm truyền đầu ra là

$$C(s) = E(s)G_1(s)G_2(s) + D(s)G_2(s) \qquad (5.58)$$

Mà

$$C(s) = R(s) - E(s) \qquad (5.59)$$

Thay thế công thức 5.59 vào 5.58 ta được

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

trong đó:

$\frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}$ coi là hàm truyền quan hệ giữa E(s) và R(s)

$\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$ coi là hàm truyền quan hệ giữa E(s) và D(s)

Để tìm giá trị xác lập của sai số, ta áp dụng định lý xác định giá trị xác lập ở phần trước.

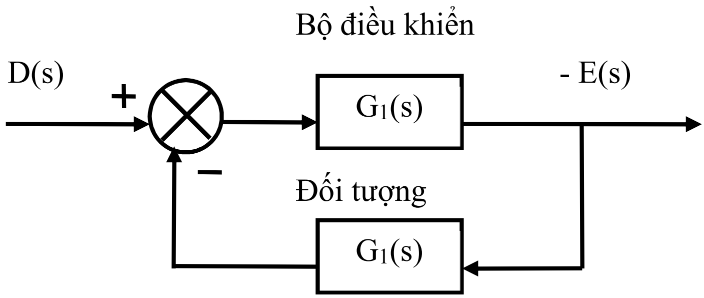
$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \lim_{s \to 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) \qquad (5.60)$$
$$= e_R(\infty) + e_D(\infty)$$

trong đó: $e_R(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s)$

$$e_D(\infty) = -\lim_{s \to 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

$e_R(\infty)$ là sai số ta có thể xác định được.

$e_D(\infty)$ là sai số do nhiễu tác động ta phải đi xác định.



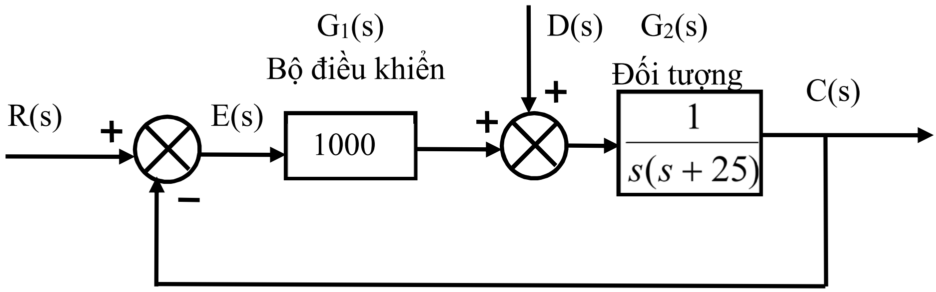
Hình 5.10: Hệ thống phản hồi nhiễu

Giả sử tín hiệu nhiễu là tín hiệu bậc thang đơn vị D(s) = 1/s

$$e_D(\infty) = -\lim_{s \to 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) = -\frac{1}{\lim_{s \to 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \to 0} G_1(s)} \quad (5.61)$$

Sai số ở trạng thái xác lập do nhiễu bậc thang đơn vị tác động có thể giảm bằng cách tăng hệ số khuếch đại một chiều của $G_1(s)$ hoặc giảm hệ số khuếch đại một chiều của $G_2(s)$.

Ví dụ 5.8: Tìm SSE khi có nhiễu tác động vào hệ thống sau



Hình 5.11: Hệ thống phản hồi âm có nhiễu tác động
với các đối tượng thực

Giải:

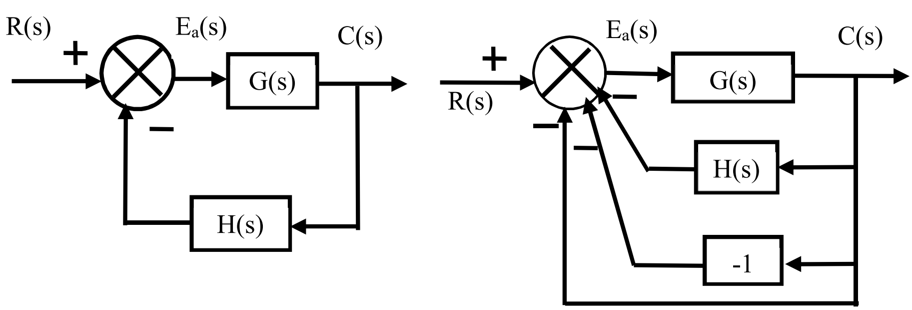
Hệ thống là ổn định.

Áp dụng công thức 5.61 ta có

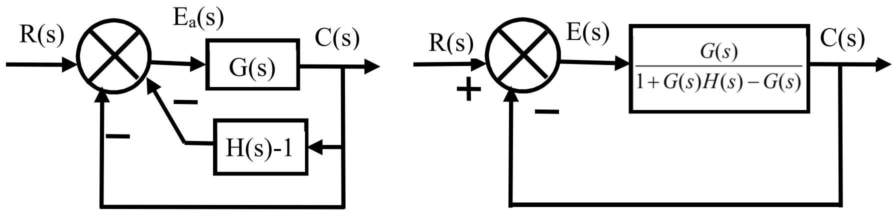
$$e_D(\infty) = -\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{G_2(s)} + \lim\limits_{s\to 0} G_1(s)} = \frac{1}{0+1000} = -\frac{1}{1000} \qquad (5.62)$$

Sai số trong trượng hợp này tỷ nghịch với hệ số khuếch đại của $G_1(s)$. Hệ số khuếch đại của $G_2(s)$ là không xác định trong ví dụ này.

5.6 SSE cho hệ thống phần hồi không phải là đơn vị



a) b)



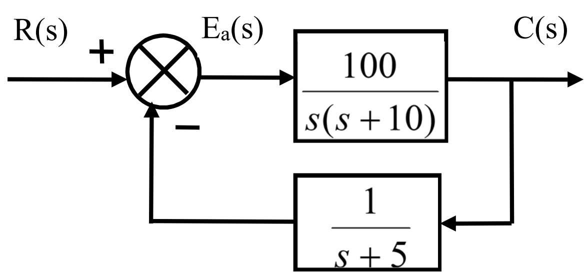
c) d)

Hình 5.12 : Hệ thống phản hồi không phải là đơn vị

Hệ thống phản hồi không phải là đơn vị dùng để bù nhiễu cải thiện hoạt động của hệ thống hoặc là mô hình vật lí của hệ thống. Mạch phản hồi có thể là hệ số khuếch đại thuần tuý hoặc là hệ thống động học.

Để tính được sai số ở trạng thái xác lập của hệ thống phản hồi không phải là đơn vị, ta biến đổi đưa về hệ thống có mạch phản hồi đơn vị để tính. Gọi $E_a(s)$ là tín hiệu thực tế của đối tượng và sai số thực tế là E(s) = R(s) – C(s). Thực hiện biến đổi sơ đồ về như sơ đồ 5.12d thì ta áp dụng được cách tính như trong hệ thống phản hồi đơn vị.

Ví dụ 5.9: cho hệ thống sau



Hình 5.13: Hệ thống phản hồi không phải là đơn vị

Tìm hằng số sai số tương ứng với loại hệ thống, sse khi tín hiệu đầu vào là tín hiệu bậc thang đơn vị.

Giải:

- Chỉ ra hệ thống là ổn định.
- Biến đổi hệ thống về dạng 5.12d)

Ta có

$$G(s) = \frac{100}{s(s+10)} \tag{5.64}$$

Và

$$H(s) = \frac{1}{s+5} \tag{5.65}$$

Tính hàm truyền có sai số thực tế là

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s) - G(s)} = \frac{100\,(s+5)}{s^3 + 10s^2 - 50s - 400)} \tag{5.66}$$

Hệ thống là loại 0 vì không có một bộ tích phân đơn trong hệ thống do vậy hằng số tương ứng là K_p

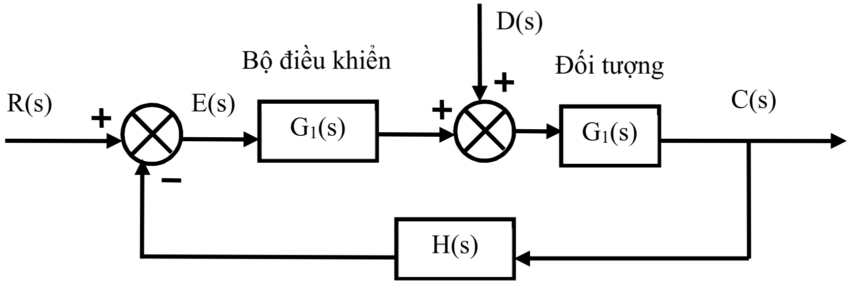
$$K_p = \lim_{s \to 0} G_e(s) = \frac{100 \times 5}{-400} = -\frac{5}{4} \tag{5.67}$$

SSE là

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{5}{4}\right)} = -4 \tag{5.68}$$

SSE nhận giá trị âm có nghĩa là tín hiệu bậc thang đơn vị của đầu ra lớn hơn đầu vào.

Khi có nhiễu tác động vào hệ thống



Hình 5.14: Hệ thống phản hồi âm
không phải là đơn vị có nhiễu tác động

SSE của hệ thống e(∞) = r(∞) – c(∞) được tính như sau

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\left\{\left[1-\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\right]R(s) - \left[\lim_{s\to 0}\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)\right]\right\} \tag{5.69}$$

Trong giới hạn R(s) = D(s) = 1/s công thức 6.69 sẽ là

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\left\{\left[1-\frac{\lim\limits_{s\to 0}[G_1(s)G_2(s)]}{\lim\limits_{s\to 0}[1+G_1(s)G_2(s)H(s)]}\right] - \left[\frac{\lim\limits_{s\to 0}G_2(s)}{\lim\limits_{s\to 0}[1+G_1(s)G_2(s)H(s)]}\right]\right\} \tag{5.70}$$

Để sai số bằng không thì

$$\frac{\lim\limits_{s\to 0}[G_1(s)G_2(s)]}{\lim\limits_{s\to 0}[1+G_1(s)G_2(s)H(s)]}=1 \text{ và } \frac{\lim\limits_{s\to 0}G_2(s)}{\lim\limits_{s\to 0}[1+G_1(s)G_2(s)H(s)]}=0 \tag{5.71}$$

Để thoả mãn 5.71 nếu

- Hệ thống ổn định.

- $G_1(s)$ là hệ thống loại 1, $G_2(s)$ là hệ thống loại 0 và H(s) là hệ thống loại 1có hệ số khuếch đại đơn vị.

5.7 Độ nhạy

Mức độ thay đổi của các thông số trong hệ thống ảnh hưởng đến hàm truyền của hệ thống và hoạt động của nó được gọi là độ nhạy. Độ nhạy bằng 0 được coi là lý tưởng.

Ví dụ: ta có hàm truyền sau

$$F = \frac{K}{K + a}$$

Nếu K = 10 và a = 100thì F = 0.091

Nếu tăng a lên gấp 3 lần a = 300 thì F = 0.032

Sự thay đổi của thông số là $\frac{300-100}{100} = 2$ có nghĩa là thay đổi 200%

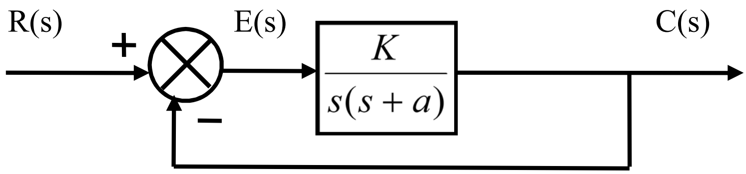
Sự thay đổi của hàm truyền là $\frac{0.032-0.091}{0.091} = -0.65$ có nghĩa là thay đổi -65%

Qua đây ta thấy rằng độ nhạy của hàm truyền đã giảm khi có sự thay đổi thông số a.

Vậy ta xem độ nhạy là gì? *Độ nhạy là tỷ số giữa phân thức thay đổi của hàm truyền với phân thức thay đổi của các thông số khi phân thức thay đổi của thông số tiến tới 0.*

$$S_{F:P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta F / F}{\Delta P / P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{P \Delta F}{F \Delta P} = \frac{P}{F} \frac{\delta F}{\delta P} \qquad (5.72)$$

Độ nhạy của hàm truyền hệ kín



Hình 5.15: Độ nhạy đối với hệ kín

- Tính độ nhạy của hệ kín

Hàm truyền của hệ kín

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + as + K} \tag{5.73}$$

Độ nhạy

$$S_{T:a} = \frac{a}{T}\frac{\delta T}{\delta a} = \frac{a}{\left(\dfrac{K}{s^2 + as + K}\right)}\left(\frac{-Ks}{s^2 + as + K}\right) = \frac{-as}{s^2 + as + K} \tag{5.74}$$

Vậy khi tăng K thì làm giảm độ nhạy của hàm truyền hệ kín đối với sự thay đổi của thông số a.

Độ nhạy của SSE với tín hiệu sườn dốc ở đầu vào

SSE của hệ thống là

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{a}{K} \tag{5.75}$$

Độ nhạy của e(∞) đối với sự thay đổi của a là:

$$S_{e:a} = \frac{a}{e}\frac{\delta e}{\delta a} = \frac{a}{a/K}\left(\frac{1}{K}\right) = 1 \tag{5.76}$$

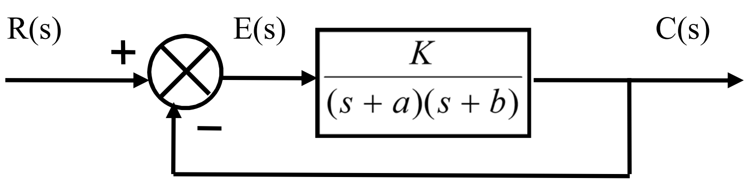
Độ nhạy của e(∞) đối với sự thay đổi của K là:

$$S_{e:K} = \frac{K}{e}\frac{\delta e}{\delta K} = \frac{K}{a/K}\left(\frac{-a}{K^2}\right) = -1 \tag{5.77}$$

Khi thay đổi thông số K và a làm ảnh hưởng trực tiếp đến e(∞). Không có sự tăng lên hay giảm xuống của độ nhạy, dấu âm thể hiện e(∞) giảm khi mà K tăng.

Độ nhạy của SSE với tín hiệu bậc thang đơn vị ở đầu vào

Cho hệ thống sau



Hình 5.16: Độ nhạy đối với SSE

SSE của hệ thống loại 0 là

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\frac{K}{ab}} = \frac{ab}{ab+K} \tag{5.78}$$

Độ nhạy của e(∞) đối với sự thay đổi của a là:

$$S_{e:a} = \frac{a}{e}\frac{\delta e}{\delta a} = \frac{a}{\left(\frac{ab}{ab+K}\right)}\left(\frac{(ab+K)b+ab^2}{(ab+K)^2}\right) = \frac{K}{ab+K} \tag{5.79}$$

Độ nhạy của e(∞) đối với sự thay đổi của K là:

$$S_{e:K} = \frac{K}{e}\frac{\delta e}{\delta K} = \frac{K}{\left(\dfrac{ab}{ab+K}\right)}\left(\frac{-ab^2}{(ab+K)^2}\right) = \frac{-K}{ab+K} \qquad (5.80)$$

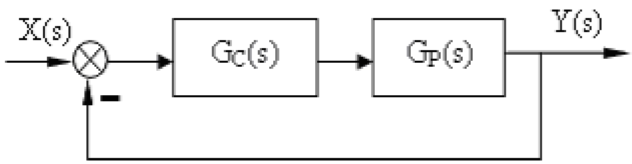
Ta thấy rằng độ nhạy khi có sự thay đổi của thông số K và a là nhỏ hơn nếu a và b đều dương. Thực chất, phản hồi trong trường hợp này làm giảm độ nhạy của hệ thống khi có sự thay đổi của cả hai thông số.

CHƯƠNG 6 TỔNG HỢP HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

6.1 Khái niệm

Tổng hợp hệ điều khiển là quá trình chọn cấu trúc bộ điều chỉnh và xác định tham số của nó để cho hệ thống làm việc ổn định và đáp ứng yêu cầu đặt ra.

Xét hệ thống điều khiển có cấu trúc như hình 6.1.



Hình 6.1: Cấu trúc cơ bản của một hệ thống điều khiển

Hàm truyền của đối tượng là $G_p(s)$, được giả thiết là đã biết. Hàm truyền đạt của hệ kín khi đó sẽ là: $W_k(s) = \dfrac{G_C(s).G_p(s)}{1 + G_C(s).G_p(s)}$

Trong thực tế người ta cố gắng chọn cấu trúc của bộ điều khiển $G_C(s)$ sao cho hàm truyền của hệ kín có dạng bậc hai như sau:

$W_k(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$ khi đó hàm quá độ là:

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\zeta\omega_0 t} \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \theta\right)$$

$$\Rightarrow t_\sigma = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sigma\% = 100.e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\,\%$$

$t_{qd} \approx \dfrac{4}{\zeta\omega_0} = \dfrac{4}{\alpha}$ ứng với vùng giới hạn a = ±2%

Bảng σ%

ξ	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
σ%	0,2	0,5	4,6	9,5	16,3	25,4	37,2

Trên cơ sở yêu cầu độ quá điều chỉnh của hệ thống, ta sẽ chọn ξ, sau đó sẽ xác định tham số của bộ điều chỉnh.

6.2 Chọn bộ điều chỉnh

6.2.1 Phân loại các bộ điều chỉnh

a. Theo chức năng

+ Bộ điều chỉnh tỷ lệ P: $W(s) = k_P$

+ Bộ điều chỉnh tích phân I: $W(s) =1/T_is$

+ Bộ điều chỉnh tỷ lệ tích phân PI: $W(s) =k_P + 1/T_is$

+ Bộ điều chỉnh tỷ lệ vi phân PD: $W(s) =k_P + T_ds$

+ Bộ điều chỉnh tỷ lệ vi tích phân PID: $W(s) =k_P + 1/T_is + T_ds$

b. Theo cách ghép nối giữa các phần tử.

Theo cách nối ghép giữa các phần tử ta có thể phân ra làm 3 dạng:

+ Nối tiếp

+ Song song

+ Hỗn hợp

PI nối tiếp: $G_C(s) = (T_1s +1)/T_is$

PI song song: $G_C(s) = k_P +1/T_is$

PI hỗn hợp: $G_C(s) = kp\ (1+1/T_is)$

c. Theo bản chất vật lý

Theo bản chất vật lý, bộ điều chỉnh được phân thành các loại sau:

+ Bộ điều chỉnh điện tử.

+ Bộ điều chỉnh khí nén.

+ Bộ điều chỉnh thuỷ lực.

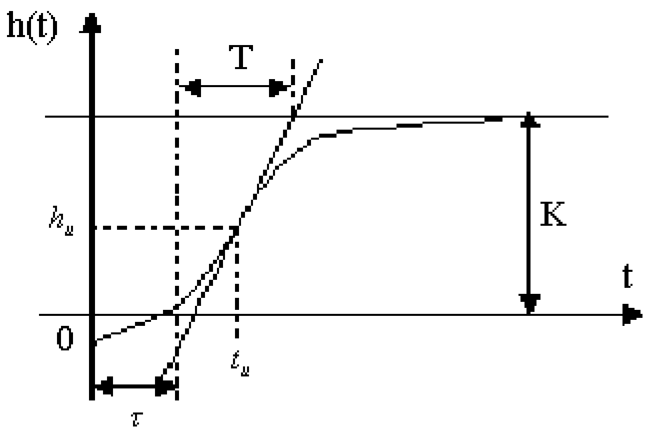
+ Bộ điều chỉnh hỗn hợp. Bao gồm sự kết hợp giữa các bộ điều chỉnh điện tử, khí nén và thuỷ lực.

6.2.2 Phương pháp Ziegler- Nichols.

a, Phương pháp 1. Giả sử đối tượng có hàm quá độ như hình 6.2. Tham số của bộ điều chỉnh được chọn như sau:

Bộ điều khiển	Hàm truyền	K_P	T_i	T_d
P	K_P	T/τ		
PI	$K_P(1+1/T_is)$	$0{,}9T/\tau$	$3T/\tau$	
PID	$K_P(1+1/T_is + T_ds)$	$1{,}2T/\tau$	$2T/\tau$	$0{,}5T/\tau$

Phương pháp này được sử dụng hiệu quả khi thoả mãn điều kiện: 01 < τ/T < 0,6

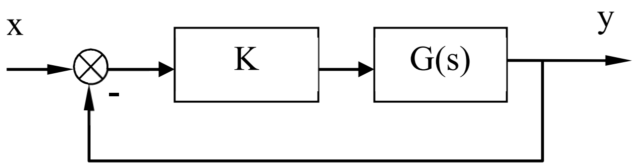


Hình 6.2: Đặc tính quá độ

b, Phương pháp 2.

Cho hệ thống điều khiển có cấu trúc như Hình 6.3.

Thay đổi K của bộ điều chỉnh P sao cho hệ thống làm việc ở biên giới ổn định, khi đó K = k_{gh}. Tín hiệu ra y có dạng dao động với chu kỳ T_{gh}.



Hình 6.3: Sơ đồ cấu trúc có hệ số khuếch đại K

Thông số của bộ điều chỉnh PID được xác định theo k_{gh} và T_{gh} như sau:

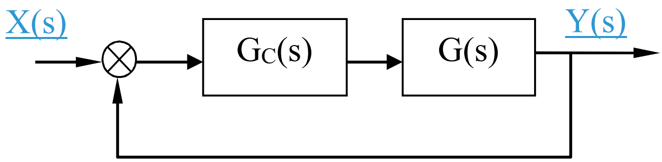
Bộ điều chỉnh	Hàm truyền	K_P	T_i	T_d
P	K_P	$0,5k_{gh}$		
PI	$K_P(1+1/T_i s)$	$0,45k_{gh}$	$0,83T_{gh}$	
PID	$K_P(1+1/T_i s + T_d s)$	$0,6k_{gh}$	$0,5T_{gh}$	$0,125T_{gh}$

6.2.3 Tiêu chuẩn phẳng

Giả thiết đối tượng có hàm truyền: $G(s) = \dfrac{k}{1+sT_b}\prod_{j=1}^{n_s}\dfrac{1}{1+sT_j}$

T_j là hằng số thời gian trội của đối tượng, n_s số hằng số thời gian trội của đối tượng, T_b tổng các hằng số thời gian bé của đối tượng.

Sơ đồ hệ thống điều khiển có cấu trúc như Hình 6.4.



Hình 6.4: Cấu trúc điều khiển có phản hồi đơn vị

Cấu trúc của bộ điều chỉnh được chọn như sau:

$$G(s) = \frac{1}{sT_i} \prod_{j=1}^{n_C} \left(1 + sT_{Cj}\right)$$

Tham số của bộ điều chỉnh được xác định theo điều kiện: $n_C = n_S$ và $T_{Cj} = T_J$.

Sau khi đã bù đủ, hệ hở có hàm truyền: $W_h(s) = \dfrac{k}{sT_i(1 + sT_b)}$

Hàm truyền của hệ kín: $W_k(s) = \dfrac{W_h(s)}{1 + W_h(s)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{W_h(s)}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{sT_i(1+sT_b)}{k}}$

Ta có: $W_k^2(j\omega) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{T_i}{k}\left(\dfrac{T_i}{k} - 2T_b\right)\omega^2 + \ldots}$

Điều kiện để hệ tối ưu là: $\left|W_k(j\omega)\right| \approx 1$

Bỏ qua các thành phần bậc cao của ω, cho thành phần thứ 2 bằng không ta có: $T_i/k = 2T_b$, suy ra $T_i = 2kT_b$.

Cấu trúc và tham số của bộ điều chỉnh được xác định theo bảng dưới đây.

n_s	Bộ điều chỉnh	Hàm truyền	T_n	T_V	T_{V2}	T_i
1	PI	$(sT_n+1)/sT_i$	T_1			$2kT_b$
2	PID	$(sT_n+1)(sT_V+1)/sT_i$	T_1	T_2		$2kT_b$
3	PID_2	$(sT_n+1)(sT_V+1)(sT_{V2}+1)/sT_i$	T_1	T_2	T_3	$2kT_b$

Ví dụ 6.1:

Cho đối tượng có hàm truyền đạt là

$$G(s) = \frac{10}{(50s+1)(10s+1)(0{,}5s+1)(0{,}01s+1)}.$$

Thiết kế bộ điều khiển theo tiêu chuẩn phẳng.

Tổng hằng số thời gian bé là: $T_b = 0{,}5 + 0{,}01 = 0{,}51$

Các hằng số thời gian trội của đối tượng là $T_1 = 50$, $T_2 = 10$.

Vì đối tượng có hai hằng số thời gian trội cho nên ta chọn cấu trúc của bộ điều khiển là PID. Các tham số được xác định như sau:

$T_n = T_1 = 50$

$T_v = T_2 = 10$

$T_i = 2*k*T_b = 2*10*0{,}51 = 10{,}2$

6.2.4 Phương pháp tổng hằng số thời gian (Kuhn)

Cho đối tượng có hàm truyền: $G(s) = k_{dt}\dfrac{B(s)}{A(s)}e^{-\tau s}$

Trong đó:

$B(s) = (1+sT_{d1})(1+sT_{d2})\ldots(1+sT_{dm})$ và $A(s) = (1+T_1s)(1+T_2s)\ldots(1+T_ns)$

$$T_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i + \tau - \sum_{i=1}^{m} T_{di}$$

Cấu trúc và tham số của bộ điều chỉnh được xác định theo bảng sau:

Bộ điều chỉnh	**Hàm truyền**	**k_P**	**T_n**	**T_V**	**T_i**
PI	$k_P(sT_n+1)/sT_i$	$0{,}5k_{dt}$	$T_\Sigma/2$	....	$T_\Sigma/2$
PID	$k_P(sT_n+1)(sT_V+1)/sT_i$	$0{,}5k_{dt}$	$T_\Sigma/3$	$T_\Sigma/3$	$T_\Sigma/3$

Ví dụ 6.2:

Cho đối tượng có hàm truyền đạt như sau: $G(s) = \frac{10e^{-2s}}{(50s+1)(10s+1)(5s+1)}$

Hằng số thời gian tổng $T_\Sigma = 50+10+5+2 = 67$

$k_{đt} = 10$

- Nếu ta chọn bộ điều khiển có cấu trúc là PI, thì tham số của bộ điều chỉnh được xác định như sau:

$K_p = 0{,}5k_{đt} = 0{,}5*10 = 5$

$T_n = T_\Sigma/3 = 67/2 = 33{,}5$

$T_I = T_\Sigma/2 = 67/2 = 33{,}5$

- Nếu ta chọn bộ điều khiển có cấu trúc PID, thì tham số của nó được xác định như sau:

$K_p = 0{,}5k_{đt} = 0{,}5*10 = 5$

$T_n = T_\Sigma/3 = 67/3 = 22{,}3$

$T_V = T_\Sigma/3 = 67/3 = 22{,}3$

$T_I = T_\Sigma/3 = 67/3 = 22{,}3$

Trong thiết kế, ta cố gắng chọn cấu trúc bộ điều chỉnh càng đơn giản càng tốt, cho nên ta sẽ chọn cấu trúc của bộ điều chỉnh là PI, nếu như bộ PI không đáp ứng được các yêu cầu đặt ra thì ta sẽ chọn cấu trúc PID

6.3 Điều khiển được và quan sát được

Cho hệ thống có mô hình trạng thái như sau:

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$
$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$$

Hệ thống được gọi là điều khiển được nếu và chỉ nếu tồn tại tín hiệu điều khiển u có thể đưa hệ từ trạng thái ban đầu $\underline{x}(0)$ tới trạng thái $\underline{x}(T)$ trong một khoảng thời gian hữu hạn T.

Hệ thống là điều khiển được nếu và chỉ nếu ma trận P = $[B\ AB\ A^2B\ ...A^{n-1}B]$ có hạng bằng n hay ma trận P không suy biến.

Hệ thống được gọi là quan sát được nếu biến trạng thái $\underline{x}(0)$ được xác định khi biết được u và y trong thời gian hữu hạn $0 < t < T$.

Hệ thống là quan sát được nếu và chỉ nếu ma trận Q = $[C^T\ A^TC^T\ ...\ (A^T)^{n-1}C^T]$ có hạng bằng n hay định thức của Q khác không.